Gottlob Frege

Escritos lógico-semánticos

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVÁN

1. QUENTIN GIBSON: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. ASHLEY MONTAGU: *La dirección del desarrollo humano* (2.ª ed.).
3. GUSTAV BERGMANN: *Filosofía de la ciencia.*
4. CHRISTIAN BAY: *La estructura de la libertad.*
5. ERNEST NAGEL: *La lógica sin metafísica.*
6. DAVID HILBERT y WILHELM ACKERMANN: *Elementos de lógica teórica* (2.ª ed.).
7. VERNON VAN DYKE: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. KARL R. POPPER: *La lógica de la investigación científica* (2.ª ed.).
9. R. M. MARTIN: *Verdad y denotación.*
10. ERNEST GELLNER: *Palabras y cosas.*
11. C. O. BROAD: *El pensamiento científico.*
12. JOHN HOSPERS: *La conducta humana.*
13. ARTHUR PAP: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. SCHELLING: *La estrategia del conflicto.*
15. RICHARD B. BRAITHWAITE: *La explicación científica.*
16. MILIC CAPEK: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. ROS ASHBY: *Proyecto para un cerebro.*
18. HANS REICHENBACH: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. GEORGE POLYA: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. GEORGE L. S. SHACKLE: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. ARMSTRONG: *La percepción y el mundo físico.*
22. ERNEST NAGEL: *Razón soberana.*
23. MAX BLACK: *Modelos y metáforas.*
24. HASKELL B. CURRY y ROBERT FEYS: *Lógica combinatoria.*
25. LUDWIG WITTGENSTEIN: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. ABRAHAM EDEL: *El método en la teoría ética.*
27. ALFRED LANDÉ: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. JEAN LADRIÈRE: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. WIENER y J. P. SCHADÉ: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. VON WRIGHT: *Norma y acción.* Una investigación lógica.
31. E. NAGEL y J. P. NEWMAN: *El teorema de Gödel.*
32. HENRY MARGENAU: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. CHAPPELL: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. ALF ROSS: *Lógica de las normas.*
35. W. SELLARS: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. CHRISTIAN THIEL: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. CLAUDE FLAMENT: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. KNEALE: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. HUGHES y M. J. CRESSWELL: *Introducción a la lógica modal.*
40. KARL R. POPPER: *Conocimiento objetivo.*

ESCRITOS LOGICO-SEMANTICOS

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

Gottlob Frege

ESCRITOS LOGICO-SEMANTICOS

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Traducción por
CARLOS R. LUIS y CARLOS PEREDA

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1974
O'Donnell, 27. Madrid-9
ISBN 84-309-0505-7
Depósito Legal: M. 19.530 - 1974

Printed in Spain. Impreso en España por Selecciones Gráficas. Paseo de la Dirección, 52. Madrid

INDICE

TERMINOLOGÍA ... *Pag.* 9

FUNCIÓN Y CONCEPTO ... 11

SOBRE SENTIDO Y SIGNIFICADO ... 31

ACLARACIONES SOBRE SENTIDO Y SIGNIFICADO ... 53

SOBRE CONCEPTO Y OBJETO ... 60

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN? ... 73

LA LÓGICA EN LA MATEMÁTICA ... 81

EL PENSAMIENTO. UNA INVESTIGACIÓN LÓGICA ... 136

LA NEGACIÓN. UNA INVESTIGACIÓN LÓGICA ... 158

INVESTIGACIONES LÓGICAS. TERCERA PARTE: ARTICULACIÓN DE PENSAMIENTOS ... 175

CUARTA INVESTIGACIÓN LÓGICA. GENERALIDAD LÓGICA ... 195

TERMINOLOGIA

ableiten	derivar
aussagen	anunciar
Bedeutung	significado
behaupten	afirmar
Behauptungskraft	poder afirmativo
bezeichnen	designar
das falsche	lo falso
Gedanke	pensamiento
Gedankengefüge	articulación de pensamientos
(un) gesättigt	(no) saturado
Satzgefüge	articulación de proposiciones
Ungedanke	no pensamiento
Begriffswort	palabra concepto (o palabra conceptual)

FUNCION Y CONCEPTO

(Conferencia pronunciada en la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena el 9 de enero de 1891.)

Hace tiempo [1] tuve el honor de disertar en esta sociedad sobre el total de signos y procedimientos de designación que he llamado Conceptograma. Hoy quisiera aclarar este asunto desde otra perspectiva y completamente con nuevos desarrollos cuya necesidad ha aparecido desde entonces. No se trata de una exposición completa de mi Conceptograma, sino sólo de aclarar pensamientos fundamentales.

Parto de lo que se llama en matemáticas función. Esta palabra no ha tenido desde el comienzo el amplio significado que obtuvo después. Será conveniente comenzar nuestras observaciones refiriéndonos al modo originario de usar esta palabra y luego mostrar las ampliaciones posteriores. Primero, quiero hablar de funciones de un solo argumento. Una expresión científica aparece por primera vez en su significado característico cuando se la usa para expresar una regularidad. Es el caso de la función con el descubrimiento del análisis superior, ya que primero se trató de formular leyes que valieran para las funciones en general. Hay, por lo tanto, que retroceder al tiempo del descubrimiento del análisis superior si se quiere saber lo que se entendió en matemáticas con la palabra «función». A esta pregunta se responderá fácilmente: «por una función de x se entiende una expresión de cálculo que x contiene, una fórmula que encierra la letra x». Luego será, por ejemplo, la expresión

$$2 \cdot x^3 + x$$

una función de x,

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

Nota.—Publico aquí esta conferencia con la esperanza de que encontrará algunos lectores para los cuales permanecería, en otro caso, desconocida entre los trabajos de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena. Tengo la intención, como en alguna ocasión he indicado, de exponer en próximos estudios cómo expreso las definiciones fundamentales de la aritmética en mi Conceptograma y cómo a partir de él llego a las pruebas solamente con mis signos. Para este propósito me es de valor poderme remitir a esta conferencia y así no me será necesario entrar en explicaciones que quizá disgustarían a muchos por estimar que no concernían directamente al tema, mientras que otros, por el contrario, lamentarían su falta. Mi conferencia no se dirige, como el lugar en que se pronunció lo exigía, solamente a matemáticos; y he intentado servirme de un modo de expresión tan comprensible para la generalidad como lo permitían el tiempo disponible y el objeto. Quizá consiga por este medio despertar el interés por el tema en círculos intelectuales amplios, en especial entre los lógicos.

[1] El 10 de enero de 1879 y el 27 de enero de 1882.

Una función de 2. Esta respuesta no puede satisfacer porque en ella no se diferencian forma y contenido, el signo y lo designado. Una falta que se comete por cierto a menudo en los escritos matemáticos actuales, incluso de autores eminentes. Ya he indicado en otra ocasión [2] las carencias de las teorías formales habituales en la aritmética. Se habla allí de signos que no tienen ningún contenido ni deben tenerlo, pero luego se les añade, no obstante, cualidades que de manera racional solamente pueden corresponder al contenido de un signo. Así también aquí: una simple expresión, la forma destinada a un contenido, no puede ser la esencia de la cosa, sino solamente el contenido mismo. ¿Cuál es entonces el contenido, el significado de «$2 \cdot 2^3+3$»? El mismo que de «18» o de «$3 \cdot 6$». En la igualdad $2 \cdot 2^3+2=18$ se expresa que el significado de la combinación de signos de la derecha es el mismo que el de la izquierda. Debo aquí oponer la opinión que, por ejemplo, $2+5$ y $3+4$ son ciertamente iguales pero no lo mismo. Esta opinión se basa de nuevo en aquella confusión entre forma y contenido, entre el signo y lo designado. Lo mismo ocurriría si se quisieran ver como distintas la violeta común de la *Viola odorata* porque los nombres suenan distintos. La diferencia de designación no alcanza para fundar una diferencia en lo designado. En nuestro ejemplo la cuestión es menos observable sólo porque el significado del signo numérico 7 no es sensiblemente perceptible. La inclinación tan extendida actualmente de no reconocer como objeto lo que no puede ser perceptible con los sentidos induce a tomar los signos numéricos mismos por los números, es decir por los objetos propios de la observación; y entonces sí, claro está, serían distintos 7 y $2+5$. Pero tal interpretación no se puede sostener pues no se puede hablar de ninguna propiedad aritmética de los números sin retroceder al significado de los signos numéricos. La propiedad del 1, por ejemplo, que multiplicado por sí mismo resulta él mismo sería pura fantasía; ninguna investigación microscópica o química, aún las más especializadas, podría descubrir esta propiedad en la inocente figura que llamamos signo numérico uno [3].

Quizá se alegase que se trata de definiciones, pero ninguna definición es creadora de modo que pudiera prestarle cualidades a una cosa que no las tiene, fuera de una, la de expresar y designar aquello por lo cual la definición se introduce como signo [4]. Tienen las figuras que llamamos

---

[2] *Los fundamentos de la Aritmética*, Breslau, 1884, § 92, e «Informe para la Sección de la Sociedad para Medicina y Ciencias naturales de Jena», *Anuario* 1885, Sección del 17 de julio.

[3] Comparar con los artículos: «Números y medidas desde el punto de vista de la teoría del conocimiento", de H. v. Helmholtz, y "Sobre el concepto número", de Leopold Kronecher (Artículos filosóficos. *Jubileo en el cincuentenario de Eduard Zeller*. Leipzig 1887).

[4] Se trata siempre de unir con un signo un sentido o un significado. Donde

signos numéricos propiedades físicas y químicas que dependen de los medios de escritura. Se podría pensar que alguna vez serán introducidos signos completamente nuevos, como por ejemplo, la numeración árabe que sustituyó a la románica. Nadie admitirá en serio que de este modo se obtendrían números completamente nuevos, nuevos objetos de la aritmética con cualidades hasta ahora no investigadas. Si se debe, por lo tanto, distinguir los signos numéricos de sus significados, se debe reconocer también el mismo significado a las expresiones «2», «1+1», «3+1», «6 : 3», pues no se ve donde radicaría la diferencia. Se dice quizás: 1+1 es una suma, pero 6 : 3 es un cociente. Pero ¿qué es 6 : 3? El número que multiplicado por 3 da 6. «*El* número», no «un número; se indica con el artículo determinado que hay solamente uno. Entonces es

$$(1+1)+(1+1)+(1+1)=6$$

y por lo tanto es (1+1) justamente el número que se designa con (6 : 3). Las distintas expresiones corresponden a distintas interpretaciones y perspectivas, pero no obstante siempre a la misma cosa. La igualdad $x^2=4$ por otra parte no recibiría solamente ambas raíces 2 y -2 sino también (1+1) e innumerables otras que se diferencian entre sí y son también en cierto sentido parecidas. En tanto se reconocen solamente dos raíces reales se rechaza la opinión que el signo de igual no significa total, sino sólo parcial correspondencia. Ateniéndonos a lo dicho vemos que las expresiones

$$«2 \cdot 1^3+1»$$
$$«2 \cdot 2^3+2»$$
$$«2 \cdot 4^3+4»$$

significan números, a saber, 3, 18, 132. Si entonces fuera la función realmente sólo significado de una expresión de cálculo, sería así justamente un número y con ello no habríamos ganado nada nuevo para la aritmética. Se acostumbra a pensar, por cierto, a propósito de la palabra «función» en expresiones con las cuales sólo indeterminadamente se indica un número con la letra x, como por ejemplo

$$«2 \cdot x^3+x»$$

pero con esto nada ha cambiado, ya que esta expresión indica también un número sólo indeterminadamente y no se establece ninguna diferencia esencial si se escribe él mismo o solamente «x». Sin embargo precisamente

---

sentido y significado falten por completo no se puede hablar propiamente ni de un signo ni de una definición.

la escritura de la «x» que indica indeterminadamente nos conduce al modo correcto de interpretación de la función. Se llama x al argumento de la función y se reconoce en

$$«2 \cdot 1^3+1»$$
$$«2 \cdot 4^3+4»$$
$$«2 \cdot 5^3+5»$$

la misma función con diferentes argumentos, a saber, 1, 4 y 5. Según esto en lo común a cada expresión se encuentra la esencia propiamente dicha de la función, esto es, lo que en

$$«2 \cdot x^3+x»$$

aún está presente, salvo la «x»; lo que podríamos escribir así

$$«2 \cdot (\ )^3+(\ )».$$

Se trata de mostrar que el argumento no pertenece a la función, sino que conforma con la función un todo completo; a la función por sí sola hay que llamarla incompleta, necesaria de complementación o no saturada. Y de este modo se diferencian fundamentalmente las funciones de los números. A partir de esta esencia de la función se aclara que, por una parte, reconozcamos en «$2 \cdot 1^3+1$» y «$2 \cdot 2^3+2$» la misma función, aunque estas expresiones significan números distintos, mientras que, por otra parte no encontramos la misma función en «$2 \cdot 1^3+1$» y «$4-1$» a pesar de los mismos valores numéricos. Vemos también, pues, qué tentador es ver en la forma de expresión lo esencial de la función. Conocemos la función en la expresión en tanto la analizamos, y la posibilidad del análisis se nos da en la construcción misma de la expresión.

Las dos partes en las que se divide la expresión del cálculo, el signo del argumento y la expresión de la función, son desiguales. Sin duda el argumento es un número, un todo cerrado por completo en sí mismo, pero no la función. Se puede esto comparar con la división de una distancia por un punto. Uno está tentado de sumar el punto de división a ambos segmentos. Pero si se quiere practicar la división con rigor, esto es, que nada se sume doblemente y nada sea dejado de lado, se debe sumar el punto solamente a una de las distancias. De tal manera un segmento será completamente cerrado en sí mismo y hay que compararlo al argumento mientras que en el otro falta algo, pues lo que se podría llamar su punto final no le pertenece. Si se lo complementa con este punto final o una longitud con dos puntos finales se obtiene de él algo completo. Si entonces digo, por ejemplo, «la función $2x^3+x$» no hay que observar a

x como perteneciendo a la función, sino que esta letra sirve solamente para indicar la clase de necesidad de complementación en tanto hace conocer los lugares donde tendrá que entrar el signo del argumento.

Llamamos a lo obtenido completando la función con el argumento el valor de la función para este argumento. Así es por ejemplo 3 el valor de la función $2 \cdot x^2+x$ para el argumento 1, porque tenemos $2 \cdot 1^2+1=3$.

Hay funciones como por ejemplo $2+x-x$, ó, $2+0 \cdot x$ cuyo valor es siempre el mismo cualquiera sea su argumento. Para todo argumento tenemos $2=2+x-x$ y $2=2+0 \cdot x$. Si se suma el argumento con la función tendríamos el número 2 para esta función. Pero esto no es correcto. Aunque aquí es siempre el valor de la función 2, no obstante hay que diferenciar la función misma de 2, pues la expresión de una función tiene que dejar siempre uno o dos lugares, los que están determinados a llenarse con el signo del argumento.

Los métodos de la geometría analítica nos ofrecen un medio de hacernos visibles los valores de una función para distintos argumentos. Si observamos el argumento como valor numérico de la abscisa de un punto y el correspondiente valor de la función como valor numérico de su ordenada, obtenemos una totalidad de puntos que se dan a la observación usualmente como curva. Cada punto de la curva corresponde a un argumento con su correspondiente valor en la función.

Sea, por ejemplo,

$$y=x^2-4x$$

una parábola donde «y» indica el valor de la función y el valor numérico de la ordenada como «x» el argumento y el valor numérico de la abcisa. Comparemos con ella la función

$$x\,(x-4),$$

así encontramos que tiene en general para el mismo argumento el mismo valor que aquélla. Tenemos en general

$$x^2-4x=x\,(x-4)$$

cualquiera sea el número que se tome para x. Por esto es la curva que obtenemos a partir de

$$y=x^2-4x$$

la misma que aparece a partir de

$$y=x\,(x-4)$$

Por consiguiente: la función $x\,(x - 4)$ tiene el mismo curso de valor que la función $x^2 - 4x$.

Si escribimos

$$x^2 - 4x = x\,(x - 4)$$

no obtenemos una función igual a la otra sino solamente igualamos los valores de verdad. Y si entendemos en esta igualdad que lo que debe valer para un argumento también se debe tomar para cualquier x, hemos expresado con esto la generalidad de una igualdad. De aquí que podamos también decir «el curso de valor de la función $x\,(x - 4)$ es igual al de la función $x^2 - 4x$» y tenemos con esto una igualdad entre dos cursos de valores. Que es posible captar la generalidad de una igualdad entre valores de función como una igualdad, esto es, como una igualdad entre cursos de valor, no hay que probarlo, me parece, sino admitirlo como principio lógico [5].

Se puede introducir también un modo breve de designar el curso de valor de una función. Con este propósito sustituyo el signo del argumento en la expresión de la función con un signo de vocal griega, cierro el todo entre paréntesis y le antepongo la misma letra griega con una coma (o acento griego, *Spiritus lenis).* Así es por ejemplo

$$\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$$

el curso de valor de la función $x^2 - 4x$, y

$$\dot{\alpha}\,(\alpha \cdot [\alpha - 4])$$

el curso de valor de la función $x\,(x - 4)$, de tal modo que tenemos en

$$«\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \dot{\alpha}\,(\alpha \cdot [\alpha - 4])»$$

que el primer curso de valor es el mismo que el segundo. Las letras griegas son elegidas, con intención, distintas para indicar que nada obliga a tomar las mismas.

$$«x^2 - 4x = x\,(x - 4)»$$

expresa sin duda el mismo sentido si lo entendemos en la forma arriba indicada, aunque de otra manera, pues expone el sentido como la gene-

[5] En numerosos usos de expresiones matemáticas usuales la palabra «función» corresponde exactamente a lo que llamé aquí «curso de valor de una función». Pero la función, en el sentido en que yo uso esta palabra, es lógicamente anterior.

ralidad de una igualdad en tanto que la expresión nueva es simplemente una igualdad cuya parte derecha tanto como su izquierda tienen un significado cerrado en sí mismo. En

$$«x^2 - 4x = x\,(x - 4)»$$

si se observa aisladamente la parte izquierda tenemos sólo indeterminadamente indicado un número y lo mismo en la parte derecha. Si tuviéramos «$x^2 - 4x$» podríamos escribir también «$y^2 - 4y$» sin cambiar el sentido pues «y» indica del mismo modo que «x» solamente un número indeterminado. Pero si se unen ambas partes para una igualdad debemos elegir las mismas letras y expresar de tal modo algo que no contenga por sí mismo ni la parte de la izquierda, ni la parte de la derecha, ni el signo de igual, esto es justamente la generalidad; por cierto la generalidad de una igualdad, pero en primera línea, sin duda, una generalidad.

Así como se indica un número indeterminadamente con una letra para expresar generalidad, también se indica una función indeterminadamente con letras. Para esto uno se sirve en la mayoría de los casos de la letra f y F de modo que en «$f(x)$» y «$F(x)$» represente x el argumento. Se representa la necesidad de complementación de la función de tal modo que la letra f o F lleva consigo un paréntesis cuyo espacio interior está destinado a la admisión del signo del argumento. Por eso indica

$$«\dot{\epsilon}\, f(\epsilon)»$$

el curso de valor de una función que permanece indeterminada.

¿Cómo se amplía el significado de la palabra función con el progreso de la ciencia? En ello se pueden diferenciar dos direcciones.

Primero, por ampliación del círculo de las clases de cálculos que intervienen en la construcción de una función. A la adición, multiplicación, potenciación y sus correspondientes cálculos opuestos se han agregado las distintas clases de evaluación de límites sin que se tuviera siempre una clara conciencia de que con esto se admitía siempre algo esencialmente nuevo. Se fue más lejos e incluso se necesitó acudir a palabras del lenguaje hablado ya que los signos del lenguaje del análisis no eran suficientes; por ejemplo, si se hablaba de una función en que el valor fuera para el argumento racional 1, para el irracional 0.

En segundo lugar se amplió el círculo en lo que respecta al argumento y al valor de la función con la admisión de números complejos. Con esto hubo que determinar al mismo tiempo, el sentido de las expresiones «suma», «producto», etc.

Sigo, pues, en ambas direcciones adelante. Primero tomo junto a los

signos +, —, etc., que sirven para construir la expresión de una función, signos como =, >, <, de tal manera que pueda hablar por ejemplo de la función $x^2=1$, donde representa x como antes, el argumento.

La primera pregunta que se nos impone recae sobre los valores de esta función para distintos argumentos. Tomemos para $x-1$ la serie 0, 1, 2, así obtenemos

$$(-1)^2=1,$$
$$0^2=1,$$
$$1^2=1,$$
$$2^2=1.$$

De estas igualdades son la primera y la tercera verdaderas, las otras falsas. Digo entonces: «el valor de nuestra función es un valor de verdad» y diferencio el valor de verdad de lo verdadero del de lo falso. Brevemente llamo al uno lo Verdadero, al otro lo Falso. Según esto significa por ejemplo «$2^2=4$» lo verdadero del mismo modo que por ejemplo «2^2» significa 4. Y «$2^2=1$» significa lo falso. Acto seguido significan lo mismo

$$«2^2=4», \quad «2>1», \quad «2^4=4^2»$$

esto es, lo verdadero, de tal manera que en

$$(2^2=4)=(2>1)$$

tenemos una igualdad correcta.

Es de suponer aquí la objeción que «$2^2=4$» y «$2>1$» enuncian sin duda algo distinto, expresan pensamientos completamente distintos, pero también «$2^4=4^2$» y «$4\cdot 4=4^2$» expresan distintos pensamientos, y no obstante se puede sustituir «2^4» con «$4\cdot 4$»porque ambos signos tienen el mismo significado. En consecuencia tienen también «$2^4=4^2$» y «$4\cdot 4=4^2$» el mismo significado. Se ve con esto que la igualdad del significado no tiene como consecuencia la igualdad del pensamiento. Cuando decimos «la estrella de la noche es un planeta de órbita más pequeña que la de la tierra» hemos expresado otro pensamiento que en la proposición «la estrella de la mañana es un planeta de órbita más pequeña que la de la tierra», pues quien no sabe que la estrella de la mañana es la estrella de la noche, podría tomar una proposición por verdadera, la otra por falsa. No obstante, debe ser el significado de ambas proposiciones el mismo porque solamente son intercambiables la una con la otra las palabras «estrella de la noche» y «estrella de la mañana», las cuales tienen el mismo sentido, esto es, son nombres propios del mismo cuerpo celeste.

Se debe diferenciar sentido y significado. «2^4» y «$4\cdot 4$» tienen por

cierto el mismo significado, esto es, son nombres propios del mismo número pero no tienen el mismo sentido y con ello tienen «$2^4=4^2$» y «$4 \cdot 4=4^2$» ciertamente el mismo significado pero no el mismo sentido, esto es, en este caso: no contienen el mismo pensamiento [6].

Por lo tanto con el mismo derecho con que escribimos

$$«2^4=4 \cdot 4»$$

podemos también escribir

$$«(2^4=4^2)=(4 \cdot 4=4^2)»$$

y

$$«(2^2=4)=(2>1)»$$

Además se podría preguntar con qué propósito son admitidos los signos $=$, $>$, $<$, en el círculo de los que ayudan a construir la expresión de una función. En este momento parece ganar cada vez más adeptos la opinión que la aritmética es una lógica más desarrollada; que una fundamentación rigurosa de las leyes aritméticas se reduce a lógica pura. Soy también de esta opinión y fundamento en ella la exigencia que se debe ampliar el lenguaje de signos aritméticos a uno lógico. Como esto es lo que ocurre en nuestro caso tenemos que señalarlo.

Vimos que el valor de nuestra función $x^2 - 1$ es siempre uno de ambos valores de verdad. Si es para un determinado argumento, por ejemplo -1, el valor de la función lo verdadero podemos expresarlo así: «el número -1 tiene la propiedad que su cuadrado es 1», o más breve: «-1 es una raíz cuadrada de 1» ó «-1 cae bajo el concepto de raíz cuadrada de 1». Si el valor de la función $x^2=1$ es para un argumento, por ejemplo 2, lo falso, podemos expresar esto así: «2 no es la raíz cuadrada de 1» ó «2 no cae bajo el concepto de raíz cuadrada de 1». Con esto vemos qué estrechamente se corresponde lo que se llama concepto en lógica con lo que nosotros llamamos función. En efecto, se podrá decir: un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad. También el valor de la función

$$(x+1)^2=2\,(x+1)$$

es siempre un valor de verdad. Obtenemos lo verdadero por ejemplo para el argumento -1 y podemos esto también expresarlo: -1 es un nú-

[6] No ignoro que este uso pueda aparecer al principio como arbitrario y artificial y que se pudiera exigir una fundamentación minuciosa. Conviene por ello comparar con mi artículo «*Sobre sentido y significado*».

mero que es una unidad más pequeña que un número y cuyo cuadrado es igual a su doble. Con esto está expresada la subsunción del número -1 bajo un concepto. Se tienen, entonces, las funciones

$$x^2=1 \text{ y } (x+1)^2=2\,(x+1)$$

y para el mismo argumento siempre el mismo valor, esto es, para -1 y $+1$ lo verdadero, para todos los otros argumentos, lo falso. Según las anteriores convenciones diremos por lo tanto que estas funciones tienen el mismo curso de valor y esto se expresa en signos de este *modo:*

$$\grave{\varepsilon}\,(\varepsilon^2=1)=\grave{\alpha}\,([\alpha+1]^2=2\,[\alpha+1])$$

En lógica se llama esto igualdad de la extensión de los conceptos. Según esto, podemos señalar como la extensión de un concepto el curso de valor de una función cuyo valor es para cada argumento un valor de verdad.

No permaneceremos más en las igualdades y en las desigualdades. La forma lingüística de la igualdad es una proposición afirmativa. Tal proposición contiene como sentido un pensamiento —o por lo menos intenta contener uno— y este pensamiento es en general verdadero o falso, esto es, tiene en general un valor de verdad que hay que comprender como el significado de la proposición del mismo modo que el número 4 es el significado de la expresión «2+2», o como Londres es el significado de la expresión «la capital de Inglaterra».

Las proposiciones afirmativas en general se pueden pensar descompuestas en dos partes del mismo modo que las igualdades o las expresiones analíticas. De esas dos partes, una es completa en sí misma, la otra tiene necesidad de complemento, no está saturada. Así se puede descomponer por ejemplo la proposición

«César sometió a las Galias»

en «César» y en «sometió a las Galias». La segunda parte no está saturada, lleva consigo un lugar vacío y recién llenado este lugar por un nombre propio o por una expresión que represente a un nombre propio aparece un sentido completo. Llamo también aquí función al significado de una parte no saturada. En este caso el argumento es César.

Vemos que aquí se ha efectuado al mismo tiempo una ampliación en la otra dirección, esto es, con respecto a lo que se puede considerar como argumento. No hay que admitir solamente números, sino en general objetos a cuyo efecto debo también contar las personas entre los objetos.

Como posibles valores de la función, ya se han introducido antes ambos valores de verdad. Debemos, pues, seguir adelante y admitir los objetos, sin ninguna clase de límite, como valores de la función. Para tener aquí un ejemplo, partamos de la expresión

«la capital del reino alemán»

Esta expresión representa manifiestamente un nombre propio y significa un objeto. La descomponemos entonces en las partes

«la capital del»

y «reino alemán» con lo cual cuento con la forma del genitivo en la primera parte, ésta queda así no saturada, mientras que la otra está completa en sí misma. Por lo tanto llamo conforme a lo anterior.

«la capital de $\mathfrak{x}$»

expresión de una función, Tomemos como su argumento el reino alemán, obtenemos así como valor de la función Berlín.

Si admitimos de este modo los objetos sin ninguna clase de limitación como argumento y como valor de la función hay que preguntarse entonces qué se llama aquí objeto. Cualquier definición de las que hemos aprendido la considero imposible porque en este caso tenemos algo que a causa de su simplicidad no admite un análisis lógico. Indicamos brevemente lo que pensamos al respecto. En este caso solamente se dice: objeto es todo lo que no es función, cuya expresión por lo tanto no lleva consigo ningún lugar vacío.

Una proposición afirmativa no contiene ningún lugar vacío y por eso hay que observar su significado como un objeto. Pero este significado es un valor de verdad. Por lo tanto son objetos ambos valores de verdad.

Coloquemos igualdades entre cursos de valor, por ejemplo,

$$\text{«}\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \dot{\alpha}\,(\alpha\,[\alpha - 4])\text{»}.$$

Podemos descomponer a ésta en «$\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$» y «$(\ ) = \dot{\alpha}\,[\alpha\,(\alpha - 4)]$».

Esta última parte necesita complementación en tanto lleva consigo un lugar vacío hacia la izquierda del signo de igual. La primera parte «$\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$» está cerrada completamente en sí misma, significa por lo tanto un objeto. Los cursos de valores de funciones son objetos mientras que las funciones mismas no lo son. Habíamos llamado a $\dot{\varepsilon}\,(\varepsilon^2 = 1)$ curso de valor pero podemos también designarlo como extensión del concepto

de raíz cuadrada de 1. También las extensiones de los conceptos son por lo tanto objetos aunque los conceptos mismos no lo son.

Después de ampliar el ámbito de lo que se debe tomar como argumento, tiene que convenirse exactamente sobre el significado de los signos ya empleados. Mientras entre los objetos se observen sólo los números enteros de la aritmética, las letras a y b en $a+b$ indicarán números enteros y sólo necesita ser aclarado el signo de suma entre los números enteros. Cada ampliación del campo de los objetos que son indicados con «a» y «b» hace necesaria una nueva aclaración del signo de suma. Hemos de tomar la precaución de que nunca una expresión pueda carecer de significado, que nunca, sin hacerlo notar, se calcule con signos vacíos admitiendo que se hace con objetos. Es éste un precepto del rigor científico. Se han hecho recientemente experiencias negativas con series infinitas divergentes. Por lo tanto, es necesario hacer convenciones de las que resulte, por ejemplo, lo que

«$\odot+1$»

significa si «$\odot$»debe significar el sol. Cómo se realicen estas convenciones es relativamente indiferente, lo esencial es que se hagan, que «$a+b$» obtenga un significado, cualquiera sean los signos de determinados objetos que se coloquen para «a» y «b». Para los conceptos establecemos la exigencia de que cada argumento ha de tener como valor un valor de verdad, que sea determinado para cada objeto, se subsuma o no bajo un concepto. Con otras palabras: formulamos la exigencia para los conceptos de su rigurosa delimitación sin cuyo cumplimiento sería imposible establecer sus leyes lógicas. Para cada argumento x para el que $x+1$ no tuviera significado no tendría tampoco la función $x+1=10$ ningún valor, por lo tanto tampoco ningún valor de verdad, de tal modo que el concepto

lo que sobrepasa a 1 es 10

no tendría ningún límite riguroso. La exigencia de la rigurosa delimitación de los conceptos lleva consigo una exigencia para la funciones en general, que deben tener un valor para cada argumento.

Hemos observado hasta aquí el valor de verdad solamente como valor de la función, no como argumento. Según lo dicho, debe obtener una función también un valor si se toma un valor de verdad como argumento. Para que la función tenga un valor puede hacerse una estipulación con este propósito en la mayoría de los casos, con los signos ya usuales, sin que con ello se considere lo que se determina. Pero se pueden considerar algunas de las funciones en las que, precisamente, nos hemos interesado, cuando su argumento es un valor de verdad.

Introduzco como tal

$$\text{——}\,x,$$

en tanto estipulo que el valor de la función tiene que ser lo verdadero cuando es tomado como argumento lo verdadero y que por el contrario en todos los otros casos es el valor de esta función lo falso; por lo tanto no sólo cuando el argumento es lo falso sino también cuando no es ningún valor de verdad.

Según esto es, por ejemplo,

$$1+3=4$$

lo verdadero. Mientras que tanto

$$1+3=5$$

como

$$\text{——}\,4$$

es lo falso. Esta función tiene por lo tanto como valor el argumento mismo cuando éste es un valor de verdad. Antes he denominado a esta barra horizontal barra del contenido, nombre que no me parece el más adecuado. Desde ahora la llamaré simplemente la horizontal.

Si escribo una igualdad o una desigualdad, por ejemplo, $5 > 4$, se quiere con esto habitualmente expresar un juicio. En nuestro caso se quiere afirmar que 5 es más grande que 4. Según la interpretación que hemos expuesto se tiene en «$5 > 4$» ó «$1+3=5$» sólo expresiones de valores de verdad sin que con ello se deba afirmar algo. Esta separación de los juicios de aquello sobre lo cual se enjuicia aparece como indispensable, pues una simple aceptación, el exponer un caso, no expresaría nada sin juzgar al mismo tiempo sobre su introducción. Por lo tanto necesitamos un signo especial para poder afirmar algo. Para esto me sirvo aquí de una barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, de tal modo que, por ejemplo, con

$$\text{«}\vdash\!\text{——}\,2+3=5\text{»}$$

afirmemos: $2+3$ es igual a 5. No se escribirá por lo tanto simplemente como un valor de verdad

$$\text{«}2+3=5\text{»}$$

sino al mismo tiempo también se dirá que lo es verdadero [7].

[7] La barra del juicio no se puede usar para la construcción de la expresión de función porque no sirve, en conexión con otros signos para designar un objeto. «$\vdash$——$2+3=5$» no designa, sino que afirma algo.

La próxima función simple puede serlo aquella cuyo valor es lo falso precisamente para los argumentos para los que es el valor de $\text{——}x$ lo verdadero y cuyo valor es lo verdadero para los argumentos respecto de los cuales el valor de $\text{——}x$ es lo falso. Lo designo de este modo

$$\text{—}\vdash x$$

a cuyo efecto llamo a la pequeña barra vertical barra de la negación. Interpreto esta función como una función con el argumento $\text{——}x$:

$$(\text{—}\vdash x)=(\text{—}\vdash[\text{——}x]),$$

en tanto pienso en ambas barras horizontales como fusionadas.

Pero también es

$$(\text{——}[\text{—}\vdash x])=(\text{—}\vdash x),$$

porque el valor de $\text{—}\vdash x$ siempre es un valor de verdad. Por lo tanto tomo en «$\text{—}\vdash x$» las partes derecha e izquierda de la barra de negación como una horizontal en el sentido especial, antes aclarado, de la palabra. Según esto significa por ejemplo lo verdadero

$$\text{«—}\vdash 2^2=5\text{»}$$

y podemos construir la barra del juicio

$$\vdash\text{—}\vdash 2^2=5;$$

y con esto afirmamos que $2^2=5$ no es lo verdadero o que 2^2 no es 5. pero es también

$$\text{—}\vdash 2$$

lo verdadero porque $\text{——}2$ es lo falso:

$$\vdash\text{—}\vdash 2;$$

esto es, 2 no es lo verdadero.

Cómo represento la generalidad se lo observará mejor con un ejemplo. Tenemos que expresar que cada objeto es igual a sí mismo. Tenemos en

$$x=x$$

una función cuyo argumento está indicado con «x». Se debe entonces

decir que el valor de esta función es siempre lo verdadero cualquiera que sea lo que pudiera tomarse como argumento. Entiendo pues bajo

$$«-\mathfrak{o}- f(\mathfrak{a})»$$

lo verdadero cuando la función $f(x)$ tiene siempre como valor lo verdadero cualquiera sea su argumento; en todos los otros casos debe

$$«-\mathfrak{o}- f(\mathfrak{a})»$$

significar lo falso. Para nuestra función $x=x$ tenemos entonces el primer caso.

Por lo tanto

$$-\mathfrak{o}- \mathfrak{a}=\mathfrak{a}$$

es lo verdadero y lo escribimos:

$$|-\mathfrak{o}- \mathfrak{a}=\mathfrak{a}.$$

Las barras horizontales hacia la derecha y hacia la izquierda de la cavidad hay que tomarlas como horizontales en nuestro sentido. En lugar de «a» podría ser elegida cualquier otra letra gótica con excepción de aquellas que como F, $\mathfrak{F}$, deben servir como letras de la función.

Este modo de designar otorga la posibilidad de negar la generalidad como en

$$\neg\mathfrak{o}- \mathfrak{a}^2=1.$$

Es, a saber, $-\mathfrak{o}- \mathfrak{a}^2=1$ lo falso porque no para cada argumento el valor de la función $x^2=1$ es lo verdadero. Es decir, obtenemos por ejemplo para el argumento 2, $2^2=1$, esto es lo falso. Es pues $\neg\mathfrak{o}- \mathfrak{a}^2=1$ lo falso, así es $-\mathfrak{o}- \mathfrak{a}^2=1$ lo verdadero, según lo convenido sobre la barra de negación. Tenemos por lo tanto

$$|\neg\mathfrak{o}- \mathfrak{a}^2=1;$$

esto es, «no cualquier objeto es la raíz cuadrada de 1» o «hay objetos que no son la raíz cuadrada de 1». ¿Se puede también expresar que hay raíz cuadrada de 1? Por cierto. Se necesita solamente tomar en lugar de la función $x^2=1$, la función

$$\neg\neg x^2=1.$$

A partir de

$$«\overset{\mathfrak{a}}{-\!\!\smile\!\!-}\!\!\top\ \mathfrak{a}^2=1»$$

se obtiene a traves de la fusión de las horizontales

$$«\overset{\mathfrak{a}}{-\!\!\smile\!\!\top}\ \mathfrak{a}^2=1».$$

Esto significa lo falso porque no es para cada argumento el valor de la función

$$-\!\!\top\!\!-\ x^2=1$$

lo verdadero. Es por ejemplo

$$-\!\!\top\!\!-\ 1^2=1$$

lo falso, porque $1^2=1$ es lo verdadero. Ya que

$$\overset{\mathfrak{a}}{-\!\!\smile\!\!\top}\ \mathfrak{a}^2=1$$

es entonces lo falso, así es

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^2=1$$

lo verdadero:

$$|\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^2=1;$$

esto es «no para cada argumento será el valor de la función $-\!\!\top\!\!-\ x^2=1$ lo verdadero» o «no para cada argumento será el valor de la función $x^2=1$ lo falso» o «hay por lo menos una raíz cuadrada de 1».

He aquí algunos ejemplos con signos y su traducción en palabras:

$$|\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}\geqq 0$$

hay por lo menos un número positivo;

$$|\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}<0$$

hay por lo menos un número negativo;

$$|\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ \mathfrak{a}^3-3\mathfrak{a}^2+2\mathfrak{a}=0$$

hay por lo menos una raíz de la igualdad

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Aquí hay que ver cómo son expresadas las proposiciones existenciales más importantes. Indicamos un concepto indeterminadamente con la letra de la función f, así tenemos en

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash f(\mathfrak{a})$$

la forma en la que son contenidos los últimos ejemplos prescindiendo de las barras de juicio. Las expresiones

$$«\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \mathfrak{a}^2 = 1», \qquad «\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \mathfrak{a} \geqq 0», \qquad «\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \mathfrak{a} < 0»,$$
$$«\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash \mathfrak{a}^3 - 3\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0»$$

proceden de esta forma de manera parecida, como por ejemplo de x^2 proceden «1^2», «2^2», «3^2». Tenemos en este caso en x^2 una función cuyo argumento está indicado con «x» y así captamos también

$$«\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\vdash f(\mathfrak{a})»$$

como expresión de una función cuyo argumento se indica con «f». Una tal función, esto es claro, es fundamentalmente diferente de las observadas hasta ahora, pues puede entrar como su argumento solamente una función. Ahora bien, como las funciones son fundamentalmente diferentes de los objetos, así son también las funciones cuyos argumentos son y deben ser funciones, fundamentalmente diferentes de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser otra cosa que ello. A éstas llamo funciones de primer grado, a aquéllas, funciones de segundo grado. De la misma manera diferencio conceptos de primer y segundo grado [8]. Desde hace tiempo se han tenido funciones de segundo grado en el análisis, por ejemplo en los integrales determinados, en tanto se observa la función que los integra como argumento.

Se debe añadir algo sobre las funciones con dos argumentos. Obtuvimos la expresión de una función analizando los signos complejos de un objeto en una parte saturada y en una no saturada. Analicemos así por ejemplo el signo de lo verdadero

$$«3 > 2»$$

[8] Comp. mi *Fundamentos de la Aritmética* (Breslau 1884), § 53, hacia el final, donde digo en lugar de «segundo grado», «segundo orden». La prueba ontológica de la existencia de Dios comete la falta de tratar la existencia como un concepto de primer grado.

en «3» y en «$x > 2$». De la misma manera podemos analizar todavía más la parte no saturada «$x > 2$» en «2» y

$$«x > y»,$$

donde entonces «y» da a conocer el lugar vacío que antes estaba lleno con «2». Tenemos en

$$x > y$$

una función con dos argumentos que se indican uno con «x», el otro con «y», y en

$$3 > 2$$

tenemos el valor de la función para los argumentos 3 y 2. Tenemos aquí una función cuyo valor es siempre un valor de verdad. Hemos llamado conceptos a tales funciones con un argumento; a las con dos argumentos llamamos relaciones. Relaciones tenemos por ejemplo también en

$$x^2+y^2=9$$

y en

$$x^2+y^2 > 9,$$

mientras que la función

$$x^2+y^2$$

tiene números como valores. No la llamaremos, por lo tanto, relación.

Se puede introducir aquí una función no propiamente aritmética. El valor de la función

$$\begin{array}{l} \text{—}\!\!\top\!\!\text{—}\, x \\ \quad\;\; \llcorner\!\!\text{—}\, y \end{array}$$

es lo falso si se toma como y-argumento lo verdadero y al mismo tiempo como x-argumento un objeto que no sea lo verdadero; en todos los otros casos es el valor de esta función lo verdadero. La barra horizontal de abajo y las dos partes en que la vertical reparte la de arriba hay que tomarlas como horizontales. En consecuencia se puede ver siempre como argumento —— x e —— y, esto es, valores de verdad.

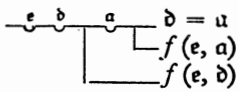
Diferenciamos entre las funciones con un argumento las de primero y segundo grado. Aquí es posible una enorme variedad. Una función con dos argumentos puede estar en relación con una del mismo o de distinto nivel. Se tendrá entonces funciones de igual grado y funciones de dis-

tinto grado. Las observadas hasta ahora eran del mismo grado. Una función de grado desigual es por ejemplo el cociente diferencial, si se toma como argumento la función que lo diferencia y el argumento para el cual se diferencia, o el integral determinado en tanto se toma como argumento la función que lo integra y el límite mayor. Las funciones de grado igual se pueden a su vez dividir en las de primero y segundo grado. Una de segundo grado es por ejemplo

$$F(f[1])$$

donde «F» y «f» indican los argumentos.

Se debe diferenciar las funciones de segundo grado con un argumento, según que pueda aparecer como este argumento una función con uno o una con dos argumentos; pues una función con un argumento es tan esencialmente diferente de una con dos argumentos que la una no puede entrar como argumento en el lugar donde puede la otra. Algunas funciones de segundo grado con un argumento requieren una función con dos argumentos y ambas clases están rigurosamente separadas



es un ejemplo de una función de segundo nivel con un argumento que requiere como tal una función con dos argumentos. La letra f indica en este momento el argumento y los lugares separados por la coma entre los paréntesis que siguen a f señalan que f representa una función con dos argumentos.

Para las funciones con dos argumentos será la variedad aún más grande.

Si echamos una mirada al desarrollo de la aritmética reconocemos un progreso escalonado. Primero se calcula con números aislados, con el 1, el 3, etc. Las proposiciones

$$2+3=5, \qquad 2 \cdot 3=6$$

son teoremas de esta clase. Se progresa luego hasta leyes generales que valen para todos los números. En la notación corresponde a pasar al cálculo con letras. En

$$(a+b \cdot c)=a \cdot c+b \cdot c$$

tenemos un teorema de esta clase. Con esto logramos observar funciones aisladas sin usar aún la palabra en sentido matemático y sin haber captado su significado. El paso próximo fue el conocimiento de las leyes generales de las funciones y con esto la acuñación de la expresión artificial «función». En la notación la introducción de letras como *f*, *F*, corresponde al indicar las funciones de modo indeterminado. En

$$\frac{d f(x) \cdot F(x)}{dx} = F(x) \cdot \frac{d f(x)}{dx} + f(x) \frac{d F(x)}{dx}$$

tenemos un teorema de esta clase. Antes se tenían funciones aisladas de segundo grado sin captar lo que hemos llamado una función de segundo grado. Cuando se hace esto se realiza el próximo progreso. Se podría pensar que de esta manera se puede proseguir, sin embargo, es probable que no sea este último paso tan rico en consecuencias como los anteriores, porque con un más amplio desarrollo se pueden tratar las funciones de segundo grado como funciones de primer grado, según se muestra en otra parte *. Pero con esto no desaparece la diferencia entre funciones de primer y segundo grado, ya que la diferencia no es arbitraria, sino que está fundada en la naturaleza misma del asunto.

Se puede también tratar una función con dos argumentos como una función de un único argumento, pero complejo, con lo cual no obstante permanece con todo su vigor la diferencia entre funciones con un argumento y aquellas con dos argumentos.

* *Leyes fundamentales de la Aritmética I*, 25, pp. 34-37 *(N. de los T.)*.

SOBRE SENTIDO Y SIGNIFICADO

Ztschr. f. Philos. v. philos. Kritik, N.F. 100, 1892, s. 25-50.
(Revista de filosofía y crítica filosófica, Nueva Serie 100, 1892, pp. 25-50.)

La igualdad[1] desafía a la reflexión con preguntas difíciles de contestar. ¿Es una relación? ¿Una relación entre objetos? ¿O entre nombres o signos para objetos? En mi «Conceptograma» acepté esto último. Los fundamentos que parecen hablar en favor de ello son los siguientes: $a=a$ y $a=b$ son claramente proposiciones con distinto valor de conocimiento: $a=a$ vale *a priori,* y desde Kant tales proposiciones se llaman analíticas, mientras que proposiciones de la forma $a=b$ a menudo contienen ampliaciones significativas de nuestro conocimiento y no pueden estar siempre fundamentadas *a priori.* El descubrimiento de cada mañana no sale un nuevo Sol sino siempre el mismo fue uno de los más ricos en consecuencia para la astronomía. Aún hoy el descubrimiento de un planeta pequeño o de un cometa no resulta siempre algo comprensible de suyo. Si sólo queremos ver en la igualdad una relación entre lo que significan los nombres «*a*» y «*b*» parecería que no podríamos diferenciar $a=b$ de $a=a$ en el caso de que $a=b$ sea verdad. De este modo expresaríamos la relación de una cosa consigo misma; precisamente aquella relación que cada cosa tiene consigo misma y no con otra. Lo que con $a=b$ se querría decir sería que los signos o nombres «*a*» y «*b*» significan lo mismo, se estaría hablando entonces de estos signos, estaríamos afirmando una relación entre ellos. Pero esta relación entre los nombres o signos existe solamente en tanto nombran o designan algo. La relación estaría mediatizada a través de la conexión de cada uno de los signos con lo designado. Pero esta conexión es arbitraria. A nadie se le puede prohibir adoptar cualquier hecho u objeto como signo de algo. De este modo una proposición $a=b$ no se referiría a la cosa misma, sino solamente a nuestra manera de designar: en realidad no expresaríamos ningún conocimiento. Sin embargo, es esto lo que queremos, precisamente, en muchos casos. Si se diferencia el signo «*a*» del signo «*b*» sólo en tanto objeto (es decir, por la figura) pero no como signo, es decir, según la manera como designa algo, en ese caso el valor de conocimiento de $a=a$ sería esencialmente igual al de $a=b$ cuando $a=b$ es verdad. Una diferenciación sólo puede surgir cuando a la diferencia de los signos corresponde una diferencia en la manera en que se da lo designado. Sean *a, b, c,* las rectas que unen los vértices de un

[1] Uso esta palabra con el sentido de identidad y entiendo «$a=b$» con el sentido de «*a* es lo mismo que *b*» o «*a* y *b* coinciden».

triángulo con los puntos medios de los lados opuestos. El punto de intersección de *a* y *b* es entonces el mismo que el punto de intersección de *b* y *c*. Tenemos por tanto distintas designaciones para el mismo punto, y estos nombres («punto de intersección de *a* y *b*», «punto de intersección de *b* y *c*») indican al mismo tiempo la manera de ser dado, y por eso, la proposición contiene un conocimiento efectivo.

Claro que con un signo (nombre, unión de palabras, signos escritos) añadido a lo designado, además de lo que llamaríamos el significado del signo, pensamos también lo que llamaríamos el sentido del signo, es decir, donde se contiene la manera como el signo es dado. En nuestro ejemplo el significado de las expresiones «el punto de intersección de *a* y *b*» y «el punto de intersección de *b* y *c*» sería el mismo, pero no su sentido. El significado de «estrella de la noche» y «estrella de la mañana» también sería el mismo, pero no su sentido.

Del contexto se desprende que entiendo bajo «signo» y «nombre» una designación que reemplaza a un nombre propio y cuyo significado es por tanto un objeto determinado (tomada esta palabra con una extensión amplia), pero no un concepto o una relación. De esto se tratará con más pormenor en otro artículo. La designación de un objeto aislado puede también hacerse con muchas palabras u otros signos. Para abreviar llamo nombres propios a cada una de tales designaciones.

El sentido del nombre propio puede entenderse por cualquiera que conozca suficientemente el lenguaje o el total de designaciones que al nombre propio pertenecen [2]; con esto se aclara sólo parcialmente el significado, en caso de que exista. Para un conocimiento global del significado necesitaríamos poder indicar cada sentido dado que realmente le pertenece. A lo cual no llegaremos nunca.

La conexión habitual entre el signo, su sentido y su significado es tal que al signo corresponde un determinado sentido y a éste a su vez un determinado significado, en tanto que a un significado (un objeto) no le corresponde sólo un signo. Para un mismo sentido hay en las distintas lenguas, y también en la misma, distintas expresiones. Claro que hay excepciones a este hecho corriente. En una totalidad perfecta de signos deberá corresponder a cada expresión un determinado sentido; pero las lenguas nacionales no cumplen a menudo con esta exigencia y hemos de

[2] En un nombre propio propiamente dicho como «Aristóteles» pueden sin duda ir disociadas las opiniones sobre su sentido. Como tales se podrían concebir: el alumno de Platón y el maestro de Alejandro el Magno. Quien hace tal cosa unirá con la proposición «Aristóteles nació en Estagira» un sentido distinto que el que se atribuiría diciendo: el maestro de Alejandro nacido en Estagira. En tanto el significado permanezca el mismo pueden soportarse estos desplazamientos de sentido, bien que en la estructura de una ciencia que se prueba paso a paso haya que evitarlos y no deban aparecer en un lenguaje ideal.

darnos por contentos cuando en el mismo contexto una misma palabra tiene siempre el mismo sentido. Quizá haya que admitir que una expresión construida desde el punto de vista gramatical con corrección y que representa a un nombre propio tiene siempre un sentido. Pero con ello no se dice que al sentido también corresponda un significado. Las palabras «el cuerpo celeste más lejano de la Tierra» tienen un sentido, pero que tengan también un significado es muy dudoso. La expresión «la serie menos convergente» tiene un sentido, pero se puede comprobar que no tiene significado, puesto que es posible encontrar a cada serie convergente otra menos convergente, aunque siempre aún convergente. Por consiguiente, cuando se ha concebido un sentido no se tiene todavía con seguridad un significado.

Cuando se usan las palabras de modo habitual su significado es aquello de lo que se quiere hablar. Sin embargo, también puede ocurrir que se quiera hablar de las palabras mismas o de su sentido. Esto sucede por ejemplo cuando las palabras de otro se introducen en la voz directa. Las palabras propias significan entonces primero las palabras del otro en cuanto éstas tienen el significado corriente. Tenemos entonces signos de signos. En este caso cuando se escriben se encierra el signo escrito entre comillas. Por tanto, no debe ser tomado un signo escrito entre comillas en su significado corriente.

Si se quiere hablar del sentido de una expresión «*A*» puede hacerse fácilmente a través de la locución «el sentido de la expresión "*A*"». En la voz indirecta se habla por ejemplo del sentido del habla de un otro. Por eso es claro que también en esa forma de hablar las palabras no tienen su significado habitual, sino que significan lo que habitualmente es su sentido. Para decirlo brevemente: las palabras son en la voz indirecta usadas *indirectamente,* o tienen su significado *indirecto.* Por consiguiente diferenciamos el significado *corriente* de una palabra de su *indirecto* y su sentido *habitual* de su *indirecto.* El significado indirecto de una palabra es su sentido habitual. Tales excepciones se deben tener siempre en cuenta si se quiere entender correctamente en un caso particular las maneras de conectarse entre el signo, el sentido y el significado.

Del significado y del sentido de un signo debe diferenciarse además la representación de él, una imagen interior originada a partir de recuerdos de impresiones sensibles pasadas o de actividades tanto exteriores como interiores[3]. Esta imagen está a menudo impregnada de afectos y la

[3] Podemos reunir las representaciones *(Vorstellungen)* en el mismo nivel que las intuiciones *(Anschauungen)* en las cuales las impresiones sensoriales y las actividades mismas entran en lugar de los rastros que ellas habían dejado en la psiquis. La diferencia es para nuestro propósito superflua, máxime cuando siempre junto a las sensaciones y actividades también los recuerdos de tales ayudan a

nitidez de cada una de sus partes es diferente y vacilante. Incluso en el mismo hombre no siempre está unida la misma representación con el mismo sentido. La representación es subjetiva: la representación de uno no es la del otro. De ahí que se den tantas diferencias en las representaciones ligadas al mismo sentido. Un pintor, un jinete, un zoólogo, unirán probablemente muy distintas representaciones con el nombre «Bucéfalus». La representación se diferencia por eso esencialmente del sentido de un signo. Mientras que la primera es una parte o modalidad de la psiquis individual, el segundo puede ser propiedad común de muchos y no se puede negar que la humanidad tiene un tesoro común de pensamientos que transmite de una generación a otra [4].

Por lo tanto, mientras que no hay ningún inconveniente para hablar del sentido por antonomasia, a las representaciones tenemos que agregar a quiénes pertenecen y de qué tiempo provienen. Se podría quizá decir: del mismo modo que con la misma palabra alguien conecta ésta y otro aquella representación, también podría una persona conectar este sentido y otra uno distinto. Solamente que la diferencia radica en la manera de hacer la conexión. No quiere decir esto que ambos no conciban el mismo sentido, pero no pueden tener la misma representación. *Si duo idem faciunt, non est idem.* Incluso cuando dos se representan lo mismo, cada uno tendrá su propia representación. Es cierto que algunas veces es posible constatar diferencias de las representaciones y aun de las sensaciones de las distintas personas, pero una comparación exacta no es posible pues no se puede tener ambas representaciones en una misma conciencia.

El significado de un nombre propio es el objeto mismo designado por él: la representación que tenemos es completamente subjetiva; entre el uno y la otra está el sentido que ciertamente ya no es subjetivo como la representación pero tampoco es el objeto mismo. El símil siguiente es quizá apropiado para esclarecer esta relación. Alguien mira la Luna a través de un telescopio. Comparo la Luna misma con el significado; la Luna es el objeto de la observación, captado, a través de la imagen real trazada por el objetivo en el interior del telescopio, por medio de la retina del observador. Comparo a la imagen en el objetivo con el sentido, a la imagen en la retina con la representación o visión. La imagen en el telescopio es solamente unilateral; sin duda es dependiente de una posición, pero objetiva en la medida en que sirve a muchos observadores. En todo caso, convéngase en que varios pueden utilizarla al mismo tiempo. Pero a partir de la imagen en la retina cada uno tendrá una imagen propia.

---

completar el cuadro intuitivo *(Anschauungsbild)*. Pero con intuición se puede también entender un objeto en tanto sea percibible sensualmente o sea espacial.

[4] Por eso no es práctico designar con la palabra «representación» cosas fundamentalmente distintas.

A causa de las distintas conformaciones de los ojos incluso una congruencia geométrica sería a penas alcanzable y un verdadero coincidir está excluido. Este símil se puede quizá todavía utilizar si se acepta que la imagen de la retina de A pudiera hacerse visible para B, o también si la propia A pudiera ver en un espejo su propia imagen de retina. En este caso habría que mostrar cómo una representación puede ser tomada como objeto, pero en cuanto tal no sería para el observador lo que es inmediatamente al que se la presenta. De todos modos seguir este camino nos conduciría muy lejos de nuestro propósito.

Podemos pues reconocer tres niveles de diferenciación de las palabras, expresiones o proposiciones completas. O bien la diferencia se refiere a las representaciones, o bien al sentido, pero no al significado, o bien finalmente al significado. Con respecto al primer nivel hay que notar que, a causa de la relación insegura de las representaciones con las palabras puede haber para alguien una diferencia que para el otro no se encuentra. La diferencia de la traducción con el original no debe de pasar del primer nivel. Como posibles diferencias se pueden agregar en este caso también las coloraciones e iluminaciones que la poesía y la elocuencia dan al sentido. Estas coloraciones e iluminaciones no son objetivas sino que cada oyente y lector debe realizarlas por sí mismo con las indicaciones del poeta y del orador. De ahí que el arte no sería posible sin el parentesco del representar humano; pero en qué medida correspondemos a la intención del poeta no puede averiguarse nunca con exactitud.

En las páginas que siguen no se hablará más de las representaciones y las intuiciones, solamente se han mencionado para que la representación que despierta una palabra en el oyente no se confunda con su sentido o con su significado.

Para posibilitar una expresión breve y exacta establezcamos las siguientes locuciones:

Un nombre propio (palabra, signo, combinación de signos, expresión) expresa su sentido, significa o designa su significado. Expresamos con un signo su sentido y designamos con él su significado.

Quizá se objete por parte del idealismo y del escepticismo: «Hablas sin más aquí de la Luna como un objeto pero ¿de dónde sabes que el nombre «la Luna» tiene un significado, de dónde sabes que, en general, alguna cosa tiene un significado?». Respondo que no es nuestra intención hablar de nuestra representación de la Luna y que tampoco nos contentamos con el sentido cuando decimos «la Luna», sino que suponemos un significado. Sería faltar precisamente al sentido suponer que en la proposición «la Luna es más pequeña que la Tierra» se está hablando de la representación de la Luna. Si el hablante quisiera decir eso usaría el giro «mi representación de la Luna». Claro que nos podemos equivocar en esta

suposición y a veces ocurren tales errores. La pregunta de si siempre nos equivocamos puede dejarse ahora sin respuesta; es suficiente por lo pronto indicar nuestra intención en el hablar o en el pensar para justificar nuestro hablar sobre el significado de un signo, aun haciendo la reserva: en caso de que un tal significado se encuentre efectivamente.

Hasta aquí se han considerado sentido y significado solamente de aquellas expresiones, palabras, signos, a los que hemos llamado nombres propios. Preguntemos ahora por el sentido y el significado de una proposición afirmativa completa. Una tal proposición contiene un pensamiento [5]. Ahora bien¿hay que considerar en este pensamiento su sentido o bien su significado? Admitamos por una vez que la proposición tiene un significado. Sustituir, en este supuesto una palabra por otra del mismo significado, pero con diferente sentido, no puede tener ninguna influencia sobre el significado de la proposición. Sin embargo vemos que el pensamiento en ese caso cambia; por ejemplo el pensamiento de la proposición «la estrella de la mañana es un cuerpo iluminado por el sol» es diferente del de la proposición «la estrella de la noche es un cuerpo iluminado por el Sol». Alguien que no supiera que la estrella de la noche es la estrella de la mañana podría tener uno de los pensamientos por verdadero y el otro por falso. El pensamiento no puede ser por tanto el significado de la proposición, tendremos que aceptarlo más bien como el sentido. Pero ¿qué sucede entonces con el significado? ¿Podemos en realidad preguntar por él?, ¿tiene quizá una proposición en cuanto un todo sólo un sentido pero ningún significado? En todo caso cabe esperar que se den tales proposiciones de la misma manera que hay partes de las proposiciones que tienen un sentido, pero ningún significado. Las proposiciones que contengan nombres propios sin significado serán de esta clase. La proposición «Desembarcaron a Ulises en Itaca sumido en profundo sueño» tiene claramente sentido. Pero puesto que es dudoso que el nombre en cuestión «Ulises» tenga un significado, del mismo modo es dudoso que la proposición completa tenga alguno. No obstante, es seguro que quien considere seriamente la proposición como verdadera o falsa también otorgará al nombre «Ulises» un significado y no sólo un sentido, ya que al significado de este nombre se le adjudicará o negará el predicado. Quien no reconoce un significado no puede ni adjudicarle un predicado ni negárselo. Avanzar sin embargo hasta el significado del nombre sería superfluo, pues nos podemos contentar con el sentido si nos detenemos en el pensamiento. Si se tratara solamente del sentido de la proposición, es decir, del pensamiento, sería entonces innecesario ocuparse del significado de una parte de la proposición, puesto que para el sentido de la proposición sólo interesa el sentido, no el significado de

[5] Por pensamiento entiendo no el hacer subjetivo del pensar, sino su contenido objetivo, que es capaz de ser propiedad común de muchos.

esta parte. El pensamiento permanece el mismo, tenga el nombre «Ulises» un significado o no. Que nos ocupemos del significado de una parte de la proposición indica ya que también para la proposición misma reconocemos y exigimos un significado en general. El pensamiento pierde en valor tan pronto reconocemos que a una de sus partes falta el significado. Tenemos por lo tanto el derecho de no contentarnos con el sentido de una proposición, sino de preguntar también por su significado. Pero ¿por qué queremos que cada nombre propio tenga no sólo un sentido sino también un significado? ¿Por qué no nos es suficiente el pensamiento? Porque nos interesa en principio su valor de verdad, aunque no sea siempre éste el caso. Al escuchar una epopeya, por ejemplo, nos cautiva junto a la armonía del lenguaje, el sentido de las proposiciones, las representaciones y los sentimientos que despiertan. Con la pregunta sobre la verdad vamos a abandonar el terreno del placer artístico y aplicarnos a la observación científica. Por ello nos es también indiferente si el nombre «Ulises» por ejemplo tiene un significado en tanto aceptemos el poema como obra de arte [6]. La aspiración a la verdad es por tanto lo que en todos los casos nos hace avanzar del sentido al significado.

Hemos visto que para una proposición siempre hay un significado que buscar si lo que interesa es el significado de las partes componentes y esto sucede si, sólo si, nos preguntamos sobre el valor de verdad.

Estamos obligados así a reconocer el *valor de verdad* de una proposición como su significado. Por valor de verdad de una proposición entiendo la circunstancia de que ella sea verdadera o falsa. Otros valores de verdad no hay. Para abreviar llamo al uno lo verdadero, al otro lo falso. Cada proposición afirmativa en la cual lo que interesa es el significado de las palabras es por tanto también comprensible en cuanto nombre propio y por cierto su significado en caso de que sea efectivo o lo verdadero o lo falso. Ambos objetos serán reconocidos, aunque no sea más que de modo implícito, por todo aquel que simplemente juzgue algo como verdadero, por tanto también por el escéptico. La designación del valor de verdad como un objeto puede parecer una ocurrencia arbitraria y quizá un simple juego de palabras del cual no se desprende ninguna consecuencia profunda. Pues lo que llamo objeto sólo puede discutirse con exactitud en conexión con el concepto y la relación. Esto sin embargo quiero reservarlo para otro artículo. Pero por lo menos que quede aquí ya claro que en cada juicio [7] —incluso cuando se trate de uno implícito— ya se ha

---

[6] Sería deseable tener una expresión especial para signos que solamente tienen un sentido. Si les llamamos imágenes, las palabras del actor en escena serían imágenes y el actor mismo sería una imagen.

[7] Para mí, un juicio no consiste sólo en entender un pensamiento, sino en reconocer su verdad.

realizado el paso del nivel del pensamiento al nivel del significado (de lo objetivo).

Se podría intentar ver la relación del pensamiento a lo verdadero no como la relación del sentido al significado, sino como la del sujeto al predicado, decir precisamente: «el pensamiento que 5 es un número primo es verdadero». Pero si se considera más cuidadosamente se nota que con esto no se ha dicho más que con la simple proposición «5 es un número primo». La afirmación de la verdad se encuentra en ambos casos en la forma de la proposición afirmativa, y allí donde ésta no tiene su fuerza habitual, por ejemplo en boca de un actor sobre la escena, la proposición «el pensamiento que 5 es un número primo es verdadero» contiene solamente un pensamiento y sin duda el mismo pensamiento que la simple proposición «5 es un número primo». De ahí se deduce que la relación del pensamiento a lo verdadero no se debe comparar con la del sujeto al predicado. Sujeto y predicado (entendidos en sentido lógico) son sin duda partes del pensamiento; desde el punto de vista del conocimiento se encuentran en el mismo nivel. Con la articulación de sujeto y predicado se llega solamente al pensamiento, nunca se va del sentido a su significado, nunca del pensamiento a su valor de verdad. Uno se mueve en el mismo nivel pero no se progresa de nivel. Un valor de verdad no puede ser parte de un pensamiento del mismo modo que el Sol no lo puede ser porque él no es un sentido, sino un objeto.

Si nuestra opinión es correcta, que el significado de una proposición es su valor de verdad, entonces éste debe permanecer inalterable cuando se sustituye una parte de la proposición con una expresión del mismo significado pero con otro sentido. Y de esto se trata. Leibniz aclara precisamente: «*Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate*». Fuera del valor de verdad ¿qué podría encontrarse que pertenezca en general a cada proposición, en la que importe el significado de las partes componentes y que en una sustitución de la clase dada éste permanezca invariable?

Por consiguiente, si el valor de verdad de una proposición es su significado, tienen por una parte todas las proposiciones verdaderas y por otra todas las proposiciones falsas el mismo significado. Vemos, pues, que en el significado de la proposición se borran todas las particularidades. Nunca, según esto, nos importará sólo el significado de una proposición, pero tampoco el puro pensamiento nos entrega conocimiento, sin sólo el pensamiento junto con su significado, esto es, con su valor de verdad. Los juicios pueden ser concebidos como el progreso de un pensamiento a su valor de verdad. No debemos sin embargo tomar esto como una definición. El juicio es sin duda algo completamente particular y sin comparación. Se podría también decir que juzgar es distinguir partes en el

valor de verdad. Este distinguir se produce retrocediendo en la línea del pensamiento. A cada sentido que pertenezca un valor de verdad correspondería entonces una manera particular del análisis. De todos modos la palabra «parte» está usada aquí de una manera especial. Esto es, traslado la relación de la parte y el todo de la proposición a su significado, llamando significado de una palabra a la parte del significado de una proposición cuando la palabra misma es parte de esa proposición. Un modo de hablar sin duda discutible, porque con el todo y una parte no están determinadas las otras partes del significado, y porque la palabra «parte» es usada con otro sentido para los cuerpos. Habría en este caso que crear una expresión propia.

Deberemos pues seguir probando la suposición de que el valor de verdad de una proposición es su significado. Hemos dicho que el valor de verdad de una proposición permanece invariable cuando en ella sustituimos una proposición por otra del mismo significado: pero no hemos aún considerado el caso de que la expresión sustituyente sea ella misma una proposición. Si nuestra opinión es correcta el valor de verdad de una proposición, que contiene a otra como parte, debe permanecer invariable si sustituimos esa parte de la proposición por una otra con el mismo valor de verdad. Hemos de esperar que se den excepciones cuando el todo o una parte de la proposición se encuentran en voz directa o indirecta, pues, como ya hemos visto no es en este supuesto el significado de la palabra el habitual. Una proposición significa en la voz directa una proposición y en la indirecta un pensamiento.

De este modo llegamos a la observación de las proposiciones subordinadas. Estas entran como parte de una articulación de proposiciones y desde el punto de vista lógico aparecen iguales a una proposición y, sin duda, a una proposición principal. Pero topamos en este caso con la pregunta de si del mismo modo para las proposiciones subordinadas que su significado sea un valor de verdad. De la voz indirecta sabemos ya lo contrario. Los gramáticos ven las proposiciones subordinadas como representantes de las partes de una proposición más general y las dividen en subordinadas nominales, adjetivales y adverbiales. De esto puede nacer la sospecha de que el significado de una proposición subordinada no es el valor de verdad, sino que sucede lo mismo que con los nombres, adjetivos o adverbios, esto es con las partes de la proposición, los cuales como sentido no tienen ningún pensamiento, sino solamente una parte de un pensamiento. Sólo una detallada investigación puede aclarar esto. En este caso no nos atendremos estrictamente a la gramática, utilizaremos lo que sea lógicamente equivalente. Busquemos primero aquellos casos en los que el sentido de una subordinada, no sea, como ya sospechamos, ningún pensamiento independiente.

En las proposiciones abstractas subordinadas nominales relacionadas con «que», se incluye también la voz indirecta en la que, como hemos visto, las palabras tienen su significado indirecto que coincide con su sentido habitual. En este caso la proposición subordinada tiene como significado un pensamiento y ningún valor de verdad; en cuanto al sentido no es ningún pensamiento sino el sentido de las palabras «el pensamiento, que...», el cual es solamente una parte del pensamiento de la articulación total de las proposiciones. Esto sucede a menudo después de «decir», «oír», «opinar», «estar convencido», «deducir» y otras palabras semejantes [8]. Otros problemas se nos presentan después de palabras como «conocer», «saber», «creer», de lo que trataremos más tarde.

Que en los casos expuestos es, efectivamente, el significado de una subordinada el pensamiento, se ve que para la verdad del todo es indiferente que el pensamiento sea verdadero o falso. Comparemos por ejemplo estas dos proposiciones: «Copérnico creía que las órbitas de los planetas eran circulares» y «Copérnico creía que la apariencia del movimiento del sol era producido por el movimiento real de la Tierra». Sin perjudicar la verdad se puede aquí sustituir una proposición subordinada por la otra. La proposición principal junto con la subordinada tiene como sentido un solo pensamiento y la verdad del todo no incluye ni la verdad ni la no verdad de la subordinación. En estos casos no está permitido sustituir en la subordinada una expresión por otra con el mismo significado habitual, sino solamente con una tal que tenga el mismo significado indirecto, esto es, el mismo sentido habitual. Si alguien quisiera incluir: el significado de una proposición no es su valor de verdad «pues entonces se le podría sustituir en todos los casos, por otro con el mismo valor de verdad», parece indudable que querría probar demasiado. También se podría afirmar que el significado de la palabra «estrella de la mañana» no es Venus pues no en todos los casos por «estrella de la mañana» se podrá decir «Venus». Con derecho sólo se puede concluir que el significado de la proposición *no siempre* es su valor de verdad y que «estrella de la mañana» no siempre significa el planeta Venus, es decir, no cuando esta palabra tiene su significado indirecto. Una tal excepción se encuentra en las subordinadas ya observadas cuyo significado es un pensamiento.

Cuando se dice «me parece que...» lo que se quiere decir es «a mí me parece que...» o «yo opino que...». Tenemos por tanto otra vez el mismo caso. Algo parecido sucede con expresiones como «alegrarse», «entristecerse», «aprobar», «censurar», «esperar», «temer». Cuando hacia el final de la batalla de la Belle-Alliance *, Wellington se alegró de que

[8] En "A mintió que él vio a B" significa la subordinada un pensamiento en el que se dice, primero, que A lo afirmó como verdadero, y segundo, que A estaba convencido de su falsedad.

* A esta batalla casi siempre se le llama Waterloo *(N. de los T.)*.

llegaran las tropas prusianas, el fundamento de su alegría era un convencimiento. Si se hubiese engañado, en tanto durase su opinión errónea, no se habría por eso alegrado menos y antes de tener el convencimiento de que venían las tropas prusianas, no se podía alegrar de ello aunque de hecho ya se aproximaran.

Así como un convencimiento o una creencia son fundamento de un sentimiento, así también pueden ser fundamento de un convencimiento, por ejemplo, en el deducir. En la proposición: «Colón dedujo de la redondez de la Tierra que viajando hacia el oeste podía alcanzar las Indias» tenemos como significado de las partes dos pensamientos: que la Tierra es redonda y que Colón viajando hacia el oeste podía alcanzar las Indias. Aquí se trata sólo de que Colón estaba convencido de uno y de otro pensamiento y que el convencimiento de uno era fundamento del otro. Si la tierra es realmente redonda y Colón viajando hacia el oeste realmente, como él pensaba, podía alcanzar las Indias es indiferente para la verdad de nuestra proposición; pero no es indiferente si en lugar de «la Tierra» ponemos «el planeta acompañado de una luna cuyo diámetro es superior a la cuarta parte del suyo», pues en este caso aparece el significado indirecto de las palabras.

Las proposiciones adverbiales introducidas de propósitos con «con esto» pertenecen también a esta clase pues sin duda el propósito es también un pensamiento; de ahí que tengamos significado indirecto de las palabras y subjuntivo como tiempo verbal.

La proposición subordinada con «que» luego de «ordenar», «pedir», «prohibir» aparece en la voz directa como imperativo. Un imperativo no tiene ningún significado sino solamente un sentido. Una orden, una petición no son, sin duda, pensamientos, pero se encuentran en el mismo nivel que el pensamiento. De ahí que en las subordinadas dependientes de «ordenar», «pedir» tienen las palabras su significado indirecto. El significado de una tal proposición no es por tanto un valor de verdad sino una orden, una exigencia, o algo similar.

Algo parecido sucede en las preguntas indirectas relacionadas por locuciones como «dudar si», «no saber que». Es fácil ver que también aquí hay que tomar las palabras en su significado indirecto. Las preguntas indirectas con «quién», «qué», «dónde», «cuándo», «cómo», «por medio de qué», etc., parecen a menudo acercarse mucho a las proposiciones adverbiales en que las palabras tienen su sentido habitual. Lingüísticamente se diferencian estos casos en el modo verbal. En el subjuntivo tenemos una pregunta indirecta y el significado indirecto de la palabra, de tal modo que un nombre propio no se puede en general sustituir con otro del mismo carácter.

En los casos observados hasta ahora tenían las palabras en la subor-

dinada su significado indirecto y de ahí se aclara que también era indirecto el significado de la propia subordinada; es decir, no un valor de verdad, sino un pensamiento, una orden, una exigencia, una pregunta. La proposición subordinada pudo ser interpretada como una palabra nominal, se podría decir: como nombre propio de aquel pensamiento, de aquella orden, etc., como la cual entra en la conexión de la articulación de proposiciones.

Llegamos a otras subordinadas en las que las palabras tienen su significado habitual sin que se presente como sentido un pensamiento y como significado un valor de verdad. La mejor manera de aclarar cómo esto es posible será con ejemplos.

«El que descubrió la forma elíptica de la órbita de los planetas murió en la miseria.»

Si aquí la subordinada tuviera como sentido un pensamiento debiera ser entonces posible expresarla en una proposición principal. Pero esto no sucede porque el sujetos gramatical «el» no tiene ningún sentido autónomo, sino sólo en la relación con la parte final de la proposición «murió en la miseria». De ahí que el sentido de la subordinada no sea ningún pensamiento completo y su significado no tenga valor de verdad, aunque digamos Kepler. Se podría objetar que el sentido del todo incluye como parte un pensamiento, es decir, que hubo alguien que fue el primero en reconocer la forma elíptica de la órbita de los planetas y, según esto, quien tenga el todo por verdadero no puede negar esa parte. Lo último es indudable pero sólo porque de otro modo la subordinada «el que descubrió la forma elíptica de la órbita de los planetas» no tendría ningún significado. Cuando se afirma algo se sobrentiende siempre como supuesto que el nombre propio usado, simple o compuesto, tiene un significado. Si entonces alguien afirma «Kepler murió en la miseria» se está suponiendo que el nombre «Kepler» designa algo pero por eso no se contiene en el sentido de la proposición «Kepler murió en la miseria» el pensamiento que el nombre «Kepler» designa algo. Si fuera éste el caso no debería la negación decir

> «Kepler no murió en la miseria»,

sino

> «Kepler no murió en la miseria o el nombre "Kepler" no tiene significado».

Que el nombre «Kepler» designa algo es más bien un supuesto que vale tanto para el significado

> «Kepler murió en la miseria»

como para la contraria. Tienen las lenguas nacionales, según esto, el defecto de que en ellas son posibles expresiones que según su forma gramatical parecen designar un objeto, pero esta determinación no se alcanza en casos especiales en cuanto depende que así sea de la verdad de la proposición. Así depende de la verdad la proposición

> «hay alguien que descubrió la forma elíptica de la órbita de los planetas»

que la proposición subordinada

> «el que descubrió la figura elíptica de la órbita de los planetas»

designe realmente un objeto o sólo despierte la apariencia de uno, aunque de hecho no tenga significado. Por consiguiente, puede parecer como si nuestra subordinada contuviese como parte de su sentido el pensamiento de que ha habido alguien que descubrió la forma elíptica de la órbita de los planetas. Si esto fuera correcto debería entonces decir la negación:

> «el que descubrió la forma elíptica de la órbita de los planetas no murió en la miseria o no hay nadie que haya descubierto la forma elíptica de la órbita de los planetas.»

Sucede así por una imperfección del lenguaje de la cual tampoco está completamente libre el lenguaje simbólico del análisis matemático; también en él pueden aparecer combinaciones de signos que despierten la apariencia de que significan algo pero que por lo menos hasta hoy no tienen significado, por ejemplo, series infinitas divergentes. Se puede evitar esto, v. g., con la estipulación especial de que series infinitas divergentes deben significar el número 0. De un lenguaje lógico completo (de un Concetograma) hay que exigir que: dada una expresión, que a partir de signos ya introducidos, sea en forma gramaticalmente correcta, construida como nombre propio, también designe de hecho un objeto y que ningún signo nuevo sea introducido como nombre propio sin que se le asegure un significado. Se advierte esto en la lógica contra la pluralidad de sentidos de una expresión como fuente de errores lógicos. Doy una importancia, similar por lo menos, a esta advertencia cuando se refiere a aparentes nombres propios que no tienen ningún significado. La historia de las matemáticas nos puede mostrar errores que se produjeron por este motivo. El uso demagógico del lenguaje utiliza quizá más esta imperfección que la que nace de la pluralidad de sentidos de las palabras. «La voluntad del pueblo» puede servir de ejemplo, pues es fácil comprobar que no hay

ningún significado general de esa expresión. Es por lo tanto importante que destruyamos de una vez por todas esa fuente de errores, por lo menos para la ciencia. Si lo logramos, objeciones como las antes discutidas serán imposibles, porque nunca podrá depender la verdad de un pensamiento de que un nombre propio tenga un significado.

Podemos añadir a estas proposiciones nominales una clase de proposiciones adjetivales y adverbiales que están, desde un punto de vista lógico, estrechamente emparentadas con ellas.

También las proposiciones adjetivales ayudan a construir nombres propios complejos aunque ellas por sí mismas, como las proposiciones nominales, no sean suficientes para ello. A estas proposiciones adjetivales hay que estudiarlas del mismo modo que a los adjetivos. En lugar de «la raíz cuadrada de 4 que es más pequeña que 0» se puede decir también «la raíz cuadrada negativa de 4». A partir de una expresión conceptual se construye con la ayuda de un artículo determinado en singular el nombre propio, lo que se permite en aquellos casos en que un objeto y solamente uno, cae bajo un concepto [9]. Las expresiones conceptuales pueden, según esto, construirse de modo tal que las notas del concepto se den con proposiciones adjetivales como en nuestro ejemplo con la proposición «el inferior a 0». Es aclarador que una tal proposición adjetival no pueda, tampoco como antes la proposición nominal, tener como sentido un pensamiento o como significado un valor de verdad, sino que tiene como sentido sólo una parte de un pensamiento, que, en muchos casos, también puede ser expresado con una sola palabra adjetival. Aquí, lo mismo que en las proposiciones nominales, falta el sujeto independiente y con esto, también la posibilidad de volver a dar el sentido de una subordinada a una proposición principal independiente.

Lugares, puntos temporales, épocas son, observados lógicamente, objetos; de ahí que haya que tomar la designación lingüística de un lugar determinado, de un instante determinado o de una época determinada como nombres propios. Las proposiciones adverbiales de lugar y de tiempo se pueden usar, pues, para construir tales nombres propios como ya lo hemos visto respecto de las proposiciones nominales o adjetivales. Del mismo modo se pueden construir expresiones para conceptos que indiquen lugares, etc. Hay que observar a este respecto que el sentido de esta subordinada no puede volver a darse en una proposición principal porque falta un componente esencial, esto es, la determinación local o temporal que sólo puede ser dada con un pronombre relativo o una conjunción [10].

---

[9] De acuerdo con lo que se advirtió anteriormente se debería asegurar siempre a tales expresiones, a través de una estipulación especial, un significado, como ocurre, por ejemplo, con la determinación que tiene que valer como su significado el número 0, cuando ningún objeto, o más de uno, caen bajo el concepto.

[10] Por otra parte para estas proposiciones son fáciles *distintas interpretaciones*.

También en las proposiciones condicionales en la mayoría de los casos hay que reconocer como ya hemos visto para las proposiciones nominales, adjetivales y adverbiales, una parte constituyente de significación indeterminada que se corresponde con la proposición consecuente. Indicándose la una a la otra se unen ambas proposiciones en un todo que normalmente expresa sólo un pensamiento. En la proposición

> «si un número es menor que 1 y mayor que 0 también es su cuadrado menor que 1 y mayor que 0»

la parte es «un número» en la proposición-antecedente y «su» en la proposición-consecuente. Precisamente a través de esta indeterminación obtiene el sentido la generalidad que uno espera que tenga una ley. Pero también por eso sucede que la proposición-antecedente no tiene, aislada, ningún pensamiento completo como sentido, pero unida a la proposición-consecuente expresa un pensamiento y solamente uno, cuyas partes no son ya pensamientos. No es, en general, correcto que en un juicio hipotético se coloquen dos juicios en correlación. Cuando se dice esto o algo parecido se usa la palabra «juicio» con el mismo sentido que yo la palabra «pensamiento» de modo tal que yo diría en lugar de juicio: «en un pensamiento hipotético se colocan dos pensamientos en correlación». Esto sólo sería verdadero si faltase una parte con significación indeterminada [11]; aunque en este caso tampoco estaría presente la generalidad.

Cuando hay que indicar indeterminadamente un punto temporal en una proposición-antecedente y en una consecuente, no es raro que se haga con el *tiempo presente* del verbo que en este caso no designa el presente propiamente dicho. Esta forma gramatical es, entonces, en la proposición principal y subordinada la parte de sentido indeterminado. «Cuando el

---

Podemos volver a dar el sentido de la proposición «después que Schleswig-Holstein fue separada de Dinamarca, se desunieron Prusia y Austria» en la forma «después de la separación de Schleswig-Holstein de Dinamarca, se desunieron Prusia y Austria». En esta forma es suficientemente claro que no hay que interpretar como parte del sentido del pensamiento que Schleswig-Holstein una vez fue separada de Dinamarca sino que esto es el supuesto necesario para que la expresión «después de la separación de Schleswig-Holstein de Dinamarca» tenga un significado. Claro que también esta proposición se deja interpretar de tal modo que es posible decir con ella que una vez fue separada Schleswig-Holstein de Dinamarca. Tenemos en este supuesto un caso sobre el que conviene hacer una observación. Para reconocer con más claridad la diferencia trasladémosnos al alma de un chino que, a causa de sus pocos conocimientos de historia europea, cree que es falso que una vez Schleswig-Holstein fue separada de Dinamarca. Este chino no tendrá nuestra proposición, concebida en la primera forma, por falsa sino que le negará todo significado no teniéndolo tampoco la subordinada, pues ésta sólo aparentemente da una determinación temporal. Si por el contrario, el chino concibe nuestra proposición de la segunda manera, encontrará en ella expresado un pensamiento que tomará por falso junto a una parte que para él no tendrá significado.

[11] A menudo falta una indicación lingüística expresa y sólo podemos obtenerla a partir del contexto.

Sol se encuentra en el trópico de Cáncer tenemos en el hemisferio norte el día más largo» es un ejemplo de ello. También aquí es imposible expresar el sentido de una subordinada en una proposición principal porque este sentido no es ningún pensamiento completo; pues si dijéramos «el Sol se encontraba en el trópico de Cáncer» entonces relacionaríamos esto con nuestro presente propiamente dicho, y con esto, cambiaríamos el sentido. Tampoco es el sentido de la proposición principal un pensamiento; recién obtenemos uno del todo constituido por la proposición principal y la subordinada. Por otra parte podemos dar también a muchas partes comunes en las proposiciones antecedente y consecuente un sentido indeterminado.

Es aclarador que las proposiciones nominales con «quien», «que» y las proposiciones adverbiales con «donde», «cuando», muchas veces haya que interpretarlas según su sentido como proposiciones-antecedentes, por ejemplo, «quien juega con mugre se ensucia».

También proposiciones adjetivales pueden representar proposiciones condicionales. Así podemos expresar: «el cuadrado de un número que sea menor que 1 y mayor que 0 es menor que 1 y mayor que 0».

Algo completamente distinto sucede cuando la parte común de la proposición principal y la relativa es designada con un nombre propio. En la proposición

> «Napoleón, que reconoció el peligro para su flanco derecho, condujo él mismo sus guardias contra la posición enemiga»

los dos pensamientos expresados son:

1. Napoleón reconoció el peligro para su flanco derecho;
2. Napoleón condujo él mismo sus guardias contra la posición enemiga.

Cuándo y dónde esto sucedió sólo puede conocerse a partir del contexto. Supongamos, sin embargo, que está determinado. Cuando enunciamos nuestra proposición completa como afirmación, afirmamos al mismo tiempo ambas partes de la proposición. Si una de esas partes fuera falsa entonces sería el todo falso. Así resulta que la relativa por sí sola tiene un pensamiento completo como sentido (si lo complementamos con lugar y tiempo). El significado de la relativa es por eso un valor de verdad. Cabe esperar por tanto que la podamos sustituir, sin perjuicio de la verdad del todo, con una proposición del mismo valor de verdad. Este es también el caso; solamente tiene que observarse que su sujeto debe ser «Napoleón» por razones puramente gramaticales, pues ella sólo puede ser

colocada en la forma de una proposición adjetival a «Napoleón». Pero si no se tiene en cuenta la exigencia de preservar la forma de la proposición y se permite la conjunción con «y» entonces desaparece esta limitación.

También en proposiciones subordinadas con «aunque» se expresarán pensamientos completos. Esta conjunción no tiene en sí misma ningún sentido, y no cambia tampoco el sentido de la proposición, sino que sólo lo ilumina de un modo propio [12]. Sin duda podríamos sin perjuicio de la verdad del todo sustituir la proposición concesiva con otra del mismo valor de verdad; pero la iluminación va a aparecer un tanto como inapropiada, como si se quisiera entonar una canción de contenido triste de modo picaresco.

En los últimos casos incluía la verdad del todo la verdad de las partes. Otra cosa sucede cuando una proposición condicional expresa un pensamiento completo conteniendo, en lugar de las partes de sentido indeterminado, un nombre propio o algo que haya que considerar del mismo modo. En la proposición

> «Si en este momento ya salió el Sol, entonces está el cielo sumamente nublado»

el tiempo es presente, está por lo tanto determinado. Aquí se puede decir que hay una relación entre los valores de verdad de las proposiciones condicionales y las consecuencias, es decir, que no se da el caso en que la proposición condicional significa lo verdadero y la proposición consecuente lo falso. De ahí se sigue que nuestra proposición es verdadera tanto si el Sol ahora todavía no ha salido y está el cielo fuertemente nublado o al contrario, y también si el Sol ya salió y el cielo está fuertemente nublado. Puesto que aquí sólo interesa el valor de verdad se puede sustituir cada parte de la proposición por otra del mismo valor de verdad sin variar el valor de verdad del todo. Claro que también en este supuesto la iluminación se volverá incorrecta en la mayoría de los casos: el pensamiento aparecerá fácilmente como absurdo: pero esto no tiene nada que ver con el valor de verdad. Por ello se debe siempre tener en cuenta que pensamientos secundarios, que no están explícitamente expresados en la proposición, también de algún modo están presentes, pero no deben ser considerados en el sentido de la proposición ni, por tanto, puede importar su valor de verdad [13].

---

[12] Algo parecido tenemos con «pero», «sin embargo».

[13] Se podría expresar el pensamiento de nuestra proposición también así: «o el sol en este momento todavía no ha salido, o el cielo está fuertemente nublado», en cuyo caso hay que saber cómo se interpreta esta clase de unión de proposiciones.

Se puede aquí dar por terminada la exposición de los casos más simples; hagamos entonces un balance.

La proposición subordinada no tiene en la mayoría de los casos como sentido un pensamiento, sino sólo una parte y en consecuencia como significado un pensamiento, sino sólo una parte y en consecuencia como significado ningún valor de verdad. Esto tiene su fundamento ya sea porque en la subordinada las palabras tienen un significado indirecto, de tal modo que es el significado y no el sentido de la subordinada un pensamiento, ya sea porque la subordinada es incompleta a causa de su parte con sentido indeterminado y por consiguiente expresa un pensamiento a la vez que la proposición principal. Pero hay casos también donde el sentido de la subordinada es un pensamiento completo y entonces puede, sin perjuicio de la verdad del todo, ser sustituida por otras del mismo valor de verdad, en tanto no se tropiece con obstáculos gramaticales.

Si se observan todas las subordinadas pronto se encontrarán algunas que no entran en ninguna de estas clasificaciones. A mi juicio el fundamento de esto está en que tales subordinadas no tienen ningún sentido simple. Unimos casi siempre, me parece, con el pensamiento principal que anunciamos, pensamientos subordinados, que el oyente une con nuestras palabras según leyes psicológicas aunque no estén expresados. Y porque ellos tan de por sí aparecen unidos con nuestras palabras, casi como el pensamiento principal del mismo, del mismo modo queremos también coexpresar tales pensamientos subordinados. Con ello el sentido de la proposición se hace más rico y puede suceder que tengamos más pensamientos simples que proposiciones. En muchos casos la proposición tiene que ser entendida así, en otros se puede dudar si el pensamiento secundario co-pertenece al sentido de la proposición o sólo lo acompaña [14].

Tal podría ocurrir quizá en la proposición

> «Napoleón, que reconoció el peligro para su flanco derecho, condujo él mismo sus guardias contra la posición enemiga»

en la que no sólo están expresados los dos pensamientos antes dados sino también que el conocimiento del peligro fue el fundamento por el que Napoleón condujo los guardias contra la posición enemiga. Sin duda puede dudarse de si este pensamiento sólo está sugerido o realmente expresado. Consideremos la pregunta de si sería falsa nuestra proposición si la decisión de Napoleón ya hubiera sido tomada antes de la percepción del peligro. Si a pesar de ello nuestra proposición pudiese ser verdadera no habría que concebir a nuestro pensamiento secundario como parte del sen-

[14] Esto puede ser de importancia para la pregunta de si una afirmación es una mentira, o un juramento un perjurio.

tido de nuestra proposición. Probablemente lo aceptaríamos así. En otros casos se complicará la situación: tendríamos más pensamientos simples que proposiciones. Si entonces sustituimos también la proposición

«Napoleón reconoció el peligro para su flanco derecho»

por otra con el mismo valor de verdad, por ejemplo, con

«Napoleón tenía ya más de 45 años de edad»

con esto entonces no sólo se cambiaría nuestro primer pensamiento sino también nuestro tercer pensamiento, y con esto, también podría convertirse en otro su valor de verdad es decir, si su edad no fue el fundamento de la decisión de conducir los guardias contra el enemigo. A partir de esto hay que ver por qué en tales casos no siempre pueden sustituirse proposiciones por otras del mismo valor de verdad. La proposición expresa entonces por su unión con una otra más que por sí misma.

Observamos ahora casos donde tal cosa sucede regularmente. En la proposición

«Bebel creyó que con la devolución de la Alsacia-Lorena podían ser apaciguados los afanes de desquite de Francia»

se expresan dos pensamientos sin que se pueda decir, sin embargo, que pertenece a uno la proposición principal, a otro la subordinada; es decir

1. Bebel creyó que con la devolución de la Alsacia-Lorena podían apaciguarse los afanes de desquite de Francia;
2. con la devolución de la Alsacia-Lorena no pueden apaciguarse los afanes de desquite de Francia.

En la expresión del primer pensamiento tienen las palabras de la subordinada su significado indirecto mientras que las mismas palabras tienen en la expresión del segundo pensamiento su sentido habitual. Con esto vemos que a la subordinada, en nuestra articulación de proposiciones inicial, la tenemos que tomar en forma doble, con distintos significados, siendo uno un pensamiento, el otro un valor de verdad. Como en tal caso el valor de verdad no es el significado completo de la subordinada no podemos simplemente sustituirla por otra con el mismo valor de verdad. Algo semejante tenemos con expresiones como «saber», «conocer», «estar en conocimiento de».

Con una subordinada causal y la correspondiente proposición princi-

pal expresamos muchos pensamientos que no se corresponden sin embargo con cada una de las proposiciones. En la proposición

> «porque el hielo tiene un peso específico más liviano que el agua flota en el agua»

tenemos

1. el hielo tiene un peso específico más liviano que el agua;
2. si algo tiene un peso específico más liviano que el agua entonces flota sobre el agua;
3. el hielo flota sobre el agua.

El tercer pensamiento no necesita enunciarse expresamente, pues está comprendido en los dos primeros. Por el contrario, ni el primero y el tercero, ni el segundo ni el tercero juntos, harían el sentido de nuestra proposición. Vemos entonces que en nuestra subordinada

> «porque el hielo tiene un peso específico más liviano que el agua»

se expresa tanto nuestro primer pensamiento como también parte de nuestro segundo. De ahí viene que no podamos sustituir tan fácil nuestra subordinada por otra del mismo valor de verdad; pues con esto se cambiaría también nuestro segundo pensamiento y de este modo se podría incidir fácilmente sobre un valor de verdad.

Algo parecido sucede en la proposición

> «si el hierro tuviera un peso específico más liviano que el agua entonces flotaría sobre el agua».

Tenemos aquí dos pensamientos, que el hierro no tiene un peso específico inferior al agua y que algo flota en el agua cuando tiene un peso específico inferior al agua. La subordinada expresa de nuevo un pensamiento y parte de otro.

Si consideramos con este criterio la proposición

> «después que Schleswig-Holstein fue separada de Dinamarca se desunieron Prusia y Austria»

de modo que el pensamiento que expresa sea «una vez que Schleswig-Holstein fue separada de Dinamarca», tenemos primero este pensamiento, segundo el pensamiento que en un cierto tiempo, que es determinado más

de cerca por la subordinada, se desunieron Prusia y Austria. También aquí la subordinada no sólo expresa un pensamiento, sino también parte de otro. De ahí que no la debamos, en general, sustituir con otra del mismo valor de verdad.

Es difícil agotar todas las posibilidades dadas en el lenguaje; espero sin embargo haber encontrado en lo esencial los fundamentos por los que no se puede sustituir sin perjuicio de la verdad del total de la articulación de proposiciones, una subordinada con otra del mismo valor de verdad. Son tales fundamentos:

1. que la proposición subordinada no significa un valor de verdad cuando expresa solamente una parte de un pensamiento;
2. que la proposición subordinada, significa sin duda un valor de verdad, pero que hay algo más, cuando su sentido abarca junto a un pensamiento una parte de otro.

El primer caso sucede

a) con el significado indirecto de la palabra;
b) cuando una parte de la proposición sólo da a entender de modo indeterminado el lugar donde podría haber un nombre propio.

En el segundo caso se puede tomar la proposición subordinada de doble manera, una vez con el significado habitual, la otra con el significado indirecto; o también puede ser el sentido de una parte de la subordinada al mismo tiempo parte constituyente de otro pensamiento, que, conjuntamente con el pensamiento inmediatamente expresado en la proposición subordinada, produce el sentido total de la proposición principal y de la subordinada.

De aquí se sigue con suficiente probabilidad que los casos donde una subordinada no se sustituye con otra del mismo valor de verdad, no prueban nada contra nuestra opinión de que el valor de verdad es el significado de una proposición cuyo sentido es un pensamiento.

Volvamos entonces a nuestro punto de partida.

Si encontramos en general diferente el valor de conocimiento de «$a=a$» y «$a=b$» ello se aclara porque para el conocimiento, el sentido de una proposición, esto es, el pensamiento en ella expresado, cuenta tanto como su significado, es decir, como su valor de verdad. Si $a=b$ entonces es, sin duda, el significado de «b» el mismo que el de «a», y por tanto, también el valor de verdad de «$a=b$» el mismo que el de «$a=a$». A pesar de ello, puede ser diferente el sentido de «b» del sentido de «a» y con esto también ser diferente el pensamiento expresado en «$a=b$» del ex-

presado en «$a=a$»; en este caso no tienen ambas proposiciones el mismo valor de conocimiento.

Si por «juicio» entendemos, como lo hemos hecho anteriormente, el progreso del pensamiento hacia su valor de verdad, entonces diremos también que los juicios son diferentes.

ACLARACIONES SOBRE SENTIDO Y SIGNIFICADO *

(Probablemente 1892-1895.)

En un artículo (sobre sentido y significado) diferencié en primer lugar sólo para los nombres propios (o si se quiere más bien para los nombres de individuo) entre sentido y significado. Se puede hacer también esta misma diferencia para las palabras-conceptos. A causa de ello puede originarse tal oscuridad que se confunda la clasificación en conceptos y objetos con la diferenciación de sentido y significado, y que se mezcle, por una parte, sentido y concepto, y por otra, significado y objeto. A cada palabra-concepto o nombre propio corresponde por regla general un sentido y un significado, según utilizo esas palabras. Claro que en la poesía tienen las palabras solamente un sentido, pero en la ciencia y en general donde nos ocupe la pregunta sobre la verdad, no nos contentamos con el sentido, sino que también deseamos unir su significado con los nombres propios y con las palabras-conceptos, y si por descuido no lo hacemos, es una falta que fácilmente puede hacer que fracase nuestra reflexión. El significado de un nombre propio es el objeto que designa o nombra. Una palabra-concepto significa un concepto si se usa la palabra como es conveniente en lógica. Para aclarar esto recordaré algo que parece hablar muy en favor de los lógicos de la extensión contra los lógicos del contenido; a saber que sin perjuicio de la verdad, en cada proposición las palabras-conceptos pueden representar a otras si a ellas corresponde la misma extensión del concepto y que por lo tanto los conceptos se comportan de modo diferente en relación con la deducción y con las leyes lógicas sólo en tanto son diferentes sus extensiones. La relación lógica fundamental es la del caer un objeto bajo un concepto: a ella se pueden reducir todas las relaciones entre conceptos. Cuando un objeto se subsume bajo un concepto, se subsume bajo todos los conceptos de la misma extensión, como se desprende de lo dicho. Por lo tanto como los nombres propios del mismo objeto pueden sustituirse entre sí sin perjuicio de la verdad, lo mismo vale para las palabras-conceptos, cuando la extensión del concepto es la misma. En tales sustituciones se cambia, por cierto, el pensamiento, pero éste es el sentido de las proposiciones, no su significado [1].

Este, en cambio, el valor de verdad, permanece incambiado. Podría de este modo ocurrir fácilmente que se hiciera pasar la extensión del con-

---

* Publicado por Hermes-Kambastel-Kaulbach, en GOTTLOB FREGE: *Nachgelassene Schiften* (Escritos póstumos), Tomo I. Felix Meiner Verlag, Hamburgo, 1969.

[1] *Cf.* mi artículo *Sobre sentido y significado.*

cepto por el significado de la palabra-concepto; en este caso nos daríamos cuenta que la extensión de los conceptos son objetos y no conceptos *(cf.* mi conferencia *Función y concepto).* No obstante, hay en aquella afirmación un núcleo de verdad. Para presentarlo con más nitidez debo conectarlo con lo dicho en mi artículo sobre «Función y concepto». El concepto es, pues, una función de un argumento cuyo valor es siempre un valor de verdad. Por otra parte tomo del análisis la palabra función y la uso conservando su sentido más amplio, sobre el cual nos instruye la historia del análisis mismo. Un nombre de función lleva siempre consigo lugares vacíos (por lo menos uno) para el argumento, el cual en la mayoría de las veces en el análisis será indicado por la letra «x» que llena cada lugar vacío. Pero no hay que incluir el argumento en la función y por consiguiente tampoco a la letra «x» hay que incluirla entre los nombres de la función, de modo que sólo se puede hablar de lugares vacíos en tanto que no les pertenece propiamente que se les llene. Conforme a ello la función llamada por mí no saturada o con necesidad de complemento porque su nombre debe ser completado con el signo de un argumento, tiene que contener un significado completo. A un tal significado llamo objeto y en nuestro caso valor de la función para el argumento que efectúa el complemento o la saturación. En los casos que se han ofrecido primero a nuestra atención es el argumento mismo un objeto, y a estos casos nos limitaremos por ahora. Para los conceptos tenemos pues un caso especial: el valor es siempre un valor de verdad. Es decir, si completamos un nombre-concepto con un nombre propio obtenemos una frase cuyo sentido es un pensamiento, y a él pertenece como significado un valor de verdad. Cuando reconocemos a este valor de verdad como verdadero (como lo verdadero) juzgamos que el objeto en cuanto argumento se subsume bajo el concepto. Lo que llamamos no saturación en la función podemos llamar en el concepto [2] su naturaleza predicativa. Esta se muestra también allí donde se habla de un concepto de sujeto. («Todos los triángulos de lados iguales tienen ángulos iguales», esto es, «si algo es un triángulo de lados iguales, entonces es un triángulo de ángulos iguales»).

Esta esencia del concepto es, pues, un gran obstáculo para la expresión de los hechos y para el entendimiento. Si yo quiero hablar de un concepto la lengua me obliga con un poder casi ineludible a una expresión inadecuada a través de la cual el pensamiento se oscurece —casi podría decir, se falsifica—. Si digo «el concepto *de triángulos de lados iguales*» debería admitir por analogía de lenguaje que con esto designo un concepto, así

[2] Las palabras «no saturado» y «predicativo» aparecen adecuarse mejor al sentido que al significado. Pero algo debe, sin embargo, corresponder a ellas en el significado; y no dispongo de mejores palabras.

como denomino un planeta si digo «el planeta Neptuno». Pero éste no es el caso pues falta la naturaleza predicativa. De ahí que el significado de la expresión «el concepto *triángulo de lados iguales*», (en tanto haya uno presente), es un objeto. No podemos prescindir de palabras como «el concepto», por eso deben recordarse sus inconvenientes. De lo dicho se desprende que objetos y conceptos son fundamentalmente distintos y no pueden sustituirse mutuamente. Esto vale también para las correspondientes palabras o signos. Los nombres propios no pueden en realidad ser usados como predicados. Si lo son a primera vista, la observación más precisa enseña que desde el punto de vista del sentido son sólo una parte del predicado: no pueden estar los conceptos en las mismas relaciones que los objetos. No sería falso sino imposible pensar los conceptos en esta relación. De aquí que las palabras «relación del sujeto al predicado» designen dos relaciones completamente distintas, ya sea el sujeto un objeto o un concepto. Por eso lo mejor sería desterrar completamente de la lógica las palabras «sujeto» y «predicado», porque vuelven siempre a inducirnos a confundir ambas relaciones fundamentales: subsumir un objeto bajo un concepto y la subordinación de un concepto bajo un concepto. Las palabras «todos» y «algunos» que están en el sujeto gramatical pertenecen según el sentido al predicado gramatical, como se reconoce si construimos la negativa (no todos, *nonnulli).* De aquí se sigue que el predicado en estos casos es distinto de aquello que decimos de un objeto. Lo es también la relación de igualdad que entiendo por coincidencia completa, identidad, sólo pensable entre objetos, no entre conceptos. Si decimos que el significado de la palabra-concepto «sección de cónica» es el mismo que el de la palabra-concepto «curva de segundo orden» o «el concepto *sección de cónica* se subsume bajo el concepto *curva de segundo orden*» así son las palabras «significado de la palabra-concepto "sección de cónica"» nombre de un objeto, no de un concepto; pues falta la naturaleza predicativa, la saturación, la posibilidad de usar un artículo indeterminado. Lo mismo vale para las palabras «el concepto *sección de cónica*». Pero si la relación de igualdad sólo es pensable entre objetos, ocurre también entre conceptos una relación parecida a la que llamo relación de segundo orden, mientras que a cada igualdad llamo relación de primer orden. Decimos que un objeto a es igual a un objeto b (en el sentido de coincidencia total) si a se subsume bajo cada concepto que se subsuma b y viceversa. Obtenemos un resultado correspondiente para los conceptos si hacemos que intercambien el concepto y el objeto sus papeles. Podríamos entonces decir que la citada relación tiene lugar entre el concepto ϕ y el concepto X si cada objeto que se subsume bajo Φ también se subsume bajo X y viceversa. Otra vez es imposible evitar las expresiones «el concepto ϕ», "el concepto X», y con ellas el sentido exacto

se vuelve a oscurecer. Por eso, para que los lectores no se asusten del conceptograma quiero añadir esto: la no saturación del concepto (primer orden) se expone en el conceptograma de modo tal que su relación contiene por lo menos un lugar vacío para el ingreso de nombres de un objeto que actúan bajo un concepto. Este lugar o estos lugares tienen que ser siempre completados de alguna manera. Además de con nombres propios puede suceder esto con signos que indican sólo un objeto. De aquí hay que inferir que al lado de un signo de igual o de algún signo parecido no puede estar nunca solo la relación de un concepto, sino que siempre, además del concepto, debe indicarse o designarse un objeto. También cuando indicamos esquemáticamente conceptos con una letra de función, debe hacerse de tal modo que la no saturación pueda observarse a través del lugar vacío que ésta traiga, como en ϕ ( ) y X ( ). En otras palabras: deberíamos siempre usar las letras (ϕ, X) como letras de una función que los conceptos deben indicar o designar, es decir, de modo que lleven consigo un lugar para el argumento (el espacio vacío que sigue al paréntesis). No se debe pues escribir $\Phi = X$ porque en este caso las letras Φ y X no entran como letras de una función.. Pero tampoco se debe escribir $\Phi(\ ) = X(\ )$ porque deben llenarse los lugares del argumento. Pero si se llenan se igualan de este modo entre sí no sólo las funciones (conceptos), sino que se coloca a cada lado del signo de igual, además de la letra de la función, algo que no pertenece propiamente a la función.

No se pueden sustituir las letras con aquellas que no se usan como letras de función: un lugar de argumento tiene que estar siempre abierto para la recepción del «*a*». Se podría tener la idea de escribir fácilmente $\Phi = X$. Esto puede parecer aceptable en tanto se indiquen los conceptos esquemáticamente; pero una forma de designación que verdaderamente se adecúe a los hechos debe apropiarse a todos los casos. Tomemos un ejemplo que ya he usado en mi escrito sobre «Función y concepto».

La función $x^2 = 1$ tiene para cada argumento el mismo valor (de verdad) que la función $(x+1)^2 = 2(x+1)$; esto es, bajo el concepto *raíz cuadrada de 1* cae cada objeto que caiga bajo el concepto *lo que es más pequeño que 1 es un número cuyo cuadrado es igual al doble* y viceversa. Nosotros expresaríamos este pensamiento de la manera ya citada *

$$(\alpha^2 = 1) \overset{\alpha}{\smile} ([\alpha+1]^2 = 2[\alpha+1])$$

En verdad tenemos aquí aquella relación de segundo orden a la que corresponde la igualdad entre objetos (la completa coincidencia) pero la que no se tiene que confundir con ella. Escribamos, pues, $-\overset{\alpha}{\smile}-(\mathfrak{a}^2 = 1) =$

* Podría ser que los simbolismos *no* aclarados que se usan en la próxima fórmula, Frege los haya introducido en la primera parte, perdida, del manuscrito. *(N. del editor alemán).*

$=([\alpha+1]^2=2\,[\alpha+1])$ así expresamos en lo esencial el mismo pensamiento, captado como la generalidad de una igualdad entre valores de función. Encontramos aquí la misma relación de segundo orden; tenemos también el signo de igual; pero éste sólo no alcanza a designar esta relación, pues únicamente puede hacerlo en combinación con el signo de generalización: en primer término tenemos una generalidad, no una igualdad. En $\grave{\varepsilon}\,(\acute{\varepsilon}^2=1)=\grave{\alpha}\,([\alpha+1]^2=2\,[\alpha+1])$ tenemos por cierto una igualdad, pero no entre conceptos (lo que es imposible), sino entre objetos, esto es, entre extensiones de conceptos.

Sabemos, pues, que la relación de igualdad entre objetos no puede ser pensada también entre conceptos, en este nivel, sin embargo, hay una relación de correspondencia. La palabra "el mismo» que es usada para designar a cada relación entre objetos no puede servir con propiedad para designar también a ésta. Por este camino no nos quedan muchas posibilidades más que decir «el concepto Φ es el mismo que el concepto X», nombrando una relación entre objetos cuando mentamos en realidad una relación entre conceptos. Tenemos el mismo caso cuando decimos «el significado de la palabra-concepto *A* es el mismo que el de la palabra-concepto *B*». Estrictamente habría que rechazar la expresión «el significado de la palabra-concepto *A*" porque el artículo determinado delante de «significado» indica un objeto y desconoce la naturaleza predicativa del concepto. Decir «lo que la palabra-concepto *A* significa» ya sería mejor pues en todo caso ésta es de uso predicativo: «Jesús es, aquello que significa la palabra-concepto «hombre» en el sentido de «Jesús es un hombre».

Teniendo en cuenta lo dicho estamos en condiciones de afirmar "lo que significan dos palabras-conceptos es, entonces y sólo entonces, lo mismo, si coinciden las extensiones de conceptos que a ellos pertenecen», sin incurrir en errar por el uso impropio de la palabra «el mismo». Y con esto, creo, se les ha hecho a los investigadores partidarios de la lógica de la extensión, una importante concesión.

Tienen razón cuando, a través de su predilección por la extensión del concepto en contra del contenido, dan a entender que el significado *de* la palabra es lo esencial para la lógica, no el sentido.

Los partidarios de la lógica del contenido se detienen en cambio con gusto en el sentido —lo que llaman contenido es, o una representación mental, o el sentido. No se dan cuenta que en la lógica poco importa cómo se originan pensamientos a partir de otros pensamientos sin cuidarse del valor de verdad. Es decir, no se dan cuenta que hay que dar el paso del pensamiento al valor de verdad, que las leyes lógicas son primero leyes en el ámbito de los significados y que sólo indirectamente se relacionan con el sentido. Si se trata de la verdad —y la lógica apunta a la verdad—

tenemos que preguntar por los significados, tenemos que rechazar los nombres propios que a ningún objeto señalan o denominan, por mucho que pretendan tener un sentido; se tienen que rechazar las palabras-conceptos que no tienen ningún significado. Estos no son por ejemplo los que unen lo que se contradice —pues un concepto puede muy bien ser vacío— sino aquellos cuya delimitación es vaga. De cada objeto se tiene que determinar si cae o no bajo de un concepto; una palabra-concepto que no atienda esta exigencia de su significado, no posee significado. A ellas pertenece también, por ejemplo, la palabra «μωλυ» (Homero, Od. X, 305) *, y pertenece aunque, como en este caso, sean dadas algunas señas. Sin embargo, no tiene por qué carecer el pasaje de sentido, como ocurre en los que se encuentra el nombre «Nausica» que probablemente no significa ni denomina nada. Pero el nombre actúa como si denominara a una muchacha y con eso se asegura un sentido. Y a la poesía le es suficiente el sentido, el pensamiento incluso sin significado, sin valor de verdad, pero no a la ciencia.

He señalado en mis *Fundamentos* y en mi conferencia sobre la teoría formal de la aritmética que para ciertas pruebas no es enteramente indiferente si una combinación de signos —por ejemplo $\sqrt{-1}$— tienen o no un significado, que más bien en esto radica por completo el poder probatorio. Por todas partes se manifiesta que el significado es lo esencial para las ciencias. Si por lo tanto, se acepta a los investigadores partidarios de una lógica del contenido, que el concepto mismo es el originario y no su extensión, no se lo aprehende como sentido de la palabra-concepto, sino como significado, y los lógicos del contenido se acercan más a la verdad cuando encuentran en la extensión el significado como lo esencial, que ciertamente no es el concepto mismo, pero que está en estrecha relación con él.

El Sr. Husserl critica la falta de nitidez cuando Schröder discute las palabras «sin sentido", «con un sentido», y «con muchos sentidos», «indistinto», «inequívoco», "equívoco», y en realidad falta claridad, pero tampoco Husserl diferencia suficientemente. Como era de esperar usa el señor Schröder las palabras ** «con sentido» y «distinto» de una manera diferente a la mía, pero no se le puede reprochar nada puesto que cuando su obra apareció no había nada mío publicado. En Schröder esta diferencia *está en* conexión con la diferencia entre nombres propios y nombres comunes y la no claridad descansa en no haber captado de modo suficiente la diferencia entre concepto y objeto. Los nombres comunes pueden, según

* La palabra μωλυ designa en Homero una planta mágica, de savia blanca y raíces negras, que Ulises recibe de Hermes para poderse proteger de Circe *(N. del editor alemán).*

** Frege escribe: "...*gebraucht Herr Schröder die Wortteile "sinnig" und "deutig" anders als ich*».

él, tener muchos sentidos cuando caen muchos objetos bajo el correspondiiente concepto [1]. Podría haber también un nombre común indistinto como «cuadrado redondo». Pero Schröder lo denomina también sin sentido y con esto se vuelve infiel a su propia manera de hablar, pues según ella, se debería decir que «cuadrado redondo» tiene un sentido y Husserl tiene razón cuando los llama nombres comunes unívocos, pues «unívoco» y «equívoco» corresponden a la diferencia hecha por Schröder entre «con *un* sentido» y «con muchos sentidos». Husserl dice (pág. 250): «(Schröder) confunde aquí de manera obvia dos preguntas muy distintas, a saber, 1) si a un nombre le conviene un significado (un «sentido»), y 2) si a un nombre le corresponde un objeto existente o no» Esta diferenciación no basta. Las palabras «nombre común» inducen a admitir que el nombre común, en lo esencial, se relaciona del mismo modo con los objetos que el nombre propio, sólo que éste denomina a un objeto en particular, mientras que aquél es aplicable en general a muchos objetos. Pero esto es falso, y por eso digo mejor en lugar de «nombre común», «palabra-concepto». El nombre propio debe tener por lo menos un sentido (como yo utilizo esta palabra), de lo contrario sería una hilera vacía de resonancias sin derecho a ser llamado nombre. Pero para el uso científico se debe exigir también de él que tenga un significado, que nombre o designe un objeto. De este modo el nombre propio se relaciona a través de un sentido, y sólo a través de éste, con el objeto.

También la palabra-concepto debe tener un sentido y para el uso científico un significado. Pero éste no radica ni en un objeto ni en varios, sino que es un concepto. Claro que con relación a un concepto se puede preguntar otra vez si bajo él cae un objeto, o muchos, o ninguno. Pero esto sólo se refiere inmediatamente a un concepto. Así puede una palabra-concepto ser lógicamente por completo incontrovertible, sin que haya un objeto, al cual se refiera su sentido y su significado (el concepto mismo). Este referirse a un objeto es, como se ve, un referirse mediatizado e inesencial, de modo que parece poco conveniente clasificar por él las palabras-conceptos según caigan bajo el correspondiente concepto ninguno, o uno, o muchos objetos. La lógica tiene que exigir tanto del nombre propio como de la palabra-concepto que el paso de la palabra al sentido y del sentido al significado sea determinado de una manera que no deje lugar a dudas. De otro modo no se debe hablar de un significado. Esto vale naturalmente para todos los signos o combinaciones de signos que tengan el mismo propósito que los nombres propios o las palabras-conceptos.

[1] Cuando, como dice Husserl en la observación de la pág. 252, un nombre distributivo es aquél «cuyo significado se concierta para designar a algo en un gran número», un nombre distributivo no es de este modo una palabra-concepto (nombre común).

SOBRE CONCEPTO Y OBJETO

(Revista trimestral de filosofía científica 16, 1892, pp. 192-205.)

Benno Kerry en una serie de artículos sobre la intuición y su elaboración psíquica ha expuesto su punto de vista en esta revista trimestral a veces asintiendo, a veces discutiendo mis Fundamentos de la Aritmética y algunos otros de mis escritos. Me alegra, claro está, y creo que la *mejor* manera de agradecerlo es aceptar la discusión de los puntos que él ha puesto en tela de juicio. Me parece además muy necesario, pues su crítica descansa, por lo menos en parte, sobre un malentendido acerca de mis enunciados sobre el concepto, que pudiera ser compartido por otros lectores. El asunto es lo bastante difícil e importante para que, incluso sin este motivo especial, se trate con más detenimiento que el que le he prestado, me parece, en mis Fundamentos.

La palabra «concepto» se usa de diferentes modos, en parte con un sentido psicológico, en parte con uno lógico, en parte con una mezcla oscura de ambos. Esta libertad que sólo existe al comienzo de la investigación, encuentra su límite natural en la exigencia de que una vez aceptado un modo de uso debe mantenerse. Me he decidido, por mi parte, a emplear, estrictamente, un uso puramente lógico. La pregunta de si éste o aquel uso es el más apropiado, deseo dejarla de lado como poco importante. Uno se puede entender fácilmente sobre la manera de expresarse cuando se reconoce que lo dicho se dice de acuerdo con una especial denominación.

Me parece que el malentendido de Kerry se produce porque confunde arbitrariamente su propio modo de uso de la palabra «concepto» con el mío. De ello surgen fácilmente contradicciones que no pueden ser atribuidas a mi modo de uso.

Kerry discute lo que llama mi definición de concepto. Deseo ante todo hacer notar que mi aclaración de concepto no está pensada como definición propiamente dicha. No se puede pedir que todo sea definido como no se puede pedir al químico que divida todos los elementos. Lo que es simple no puede ser dividido y lo que es lógicamente simple no puede ser definido apropiadamente. Lo que es lógicamente simple, lo mismo que la mayoría de los elementos químicos, no está previamente dado sino que se obtiene en el proceso del trabajo científico. Cuando se encuentra algo simple, o por lo menos, que hasta el momento vale como simple, se acuñará una denominación ya que el *lenguaje originariamente*

no tendrá una expresión adecuada. No es posible una definición para introducir el nombre de algo lógicamente simple. No queda entonces más remedio que instruir al lector o al auditor a través de señas o de aclaraciones, dando a entender lo que se ha mentado con las palabras.

Kerry desea que la diferencia entre concepto y objeto no valga absolutamente. Dice: «Yo mismo he defendido la opinión que la relación entre el contenido del concepto y el objeto del concepto es, desde cierta perspectiva, propia e irreducible; con ello sin embargo no se sostenía que las propiedades «ser concepto» y «ser objeto» estén excluidas entre sí; la última opinión se deriva tan poco de la primera como, que de la relación entre padre e hijo, no siendo más que una vez atribuible, no se puede inferir que alguien no puede al mismo tiempo ser padre e hijo (aunque naturalmente no, por ejemplo, padre de aquél de quien se es hijo)».

Analicemos el símil: si hubiera o hubiera habido esencias, los que, fueran padres, pero no pudieran ser hijos, claramente serían esencias de una clase completamente distinta a la de los hombres que son hijos. Algo parecido pasa aquí. El concepto —como yo entiendo la palabra— es predicativo[1]. Por el contrario un nombre de objeto, un nombre propio es enteramente incapaz de ser usado como predicado gramatical. Necesita esto una aclaración para que no parezca falso. ¿No se puede enunciar de algo que es Alejandro el Magno o que es el número cuatro o que es el planeta Venus, del mismo modo que se puede enunciar de algo que es verde o que es un mamífero? Cuando se piensa así no se diferencian los modos de uso de la palabra «es». En los últimos dos ejemplos la palabra sirve como cópula, sencillamente como forma lexical de la atribución. Como tal puede a veces ser representada con la verbalización de alguna de las partes del predicado. Se compara por ejemplo «esta hoja es verde» y «esta hoja enverdece». Decimos entonces que algo cae bajo un concepto y el predicado gramatical significa en este caso ese concepto. Por el contrario en los primeros tres ejemplos se usa «es» como el signo de igual en la Aritmética, para expresar una igualdad[2]. En la proposición «la estrella de la mañana es Venus» tenemos dos nombres propios para el mismo objeto, «estrella de la mañana» y «Venus». En la frase «la estrella de la mañana es un planeta» tenemos un nombre propio «la estrella de la mañana» y una palabra-concepto «un planeta». Desde el punto de vista del lenguaje nada más ha sucedido que la sustitución de «Venus» por «un

[1] Es, pues, el significado de un predicado gramatical.

[2] Uso la palabra «igual» y el signo «=» en el sentido de «lo mismo que», «no otro que», «idéntico con». Se puede comparar con las *Lecciones sobre el Algebra de la Lógica de E. Schröder* (Leipzig, 1890), Tomo 1, § 1, donde hay que reprochar que no se diferencie entre ambas relaciones fundamentales, el caer de un objeto bajo un concepto y el subordinar un concepto bajo un concepto. También ocasionan dudas las observaciones sobre la raíz cuadrada entera. En Schröder el signo =(= no representa simplemente la cópula.

planeta». Desde el punto de vista del asunto tratado, la relación ha cambiado completamente. Una igualdad es convertible; el caer de un objeto bajo un concepto no es una relación convertible. El «es» en la proposición «la estrella de la mañana es Venus» no es por cierto simplemente la cópula, sino también desde el punto de vista del contenido una parte esencial del predicado de modo tal que la palabra «Venus» no contiene la totalidad del predicado [3]. Por eso se podría decir: «La estrella de la mañana no es otra cosa que Venus» teniendo aquí lo que antes se encontraba en el simple «es» separado en cuatro palabras, y en «no es nada más que», es «es» realmente aún la cópula. Lo que aquí se enuncia no es por lo tanto simplemente Venus, sino *no otra cosa que Venus*. Estas palabras significan un concepto bajo el cual cae ciertamente sólo un objeto. Pero un tal concepto debe en todo caso todavía diferenciarse del objeto [4]. Tenemos aquí una palabra «Venus» la que nunca puede ser, en propiedad, predicado aunque muy bien pueda formar parte de un predicado. El significado [5] de esta palabra no puede, por lo tanto, introducirse como concepto sino solamente como objeto. Esto no lo ha discutido de ningún modo Kerry. Se está sin embargo admitiendo una diferencia, cuya aceptación es muy importante, entre lo que puede ser introducido sólo como objeto y todo lo demás. Y esta diferencia tampoco se borraría aun siendo verdadero lo que opina Kerry, que hay conceptos que también pueden ser objetos. Hay, por otra parte, casos que parecen apoyar este punto de vista. Yo mismo he indicado (*Fundamentos,* § 53, hacia el final) que un concepto puede caer bajo uno superior, lo que sin embargo, no debe confundirse con la subordinación de un concepto bajo otro. Kerry no alude a ello sino que da el siguiente ejemplo: «el concepto "caballo" es un concepto fácil de adquirir» y lo que se mienta es que el concepto «caballo» es un objeto y sin duda uno de los objetos que caen bajo el concepto «concepto fácil de adquirir». Ahora bien. Las tres palabras «el concepto "caballo"» designan un objeto pero precisamente no un concepto, tal como yo uso la palabra. Esto está completamente de acuerdo con la descripción [6] dada por mí de que con el singular del artículo determinado se indica siempre a un objeto, mientras que el artículo indeterminado acompaña a una palabra-concepto. Por cierto Kerry piensa que a partir de diferencias lingüísticas no se pueden fundamentar constataciones lógicas; pero del modo como yo lo hago nadie, que haga tales constataciones puede evitarlo, pues sin el lenguaje no nos podemos entender y

[3] *Cf.* mis *Fundamentos de la Aritmética,* § 66, Observación.
[4] *Cf.* mis *Fundamentos,* § 51.
[5] *Cf.* mi artículo *Sobre sentido y significado.*
[6] *Fundamentos,* § 51; § 66, observación; § 68, observación, p. 80. Frege señala solamente una excepción, proposiciones del alemán antiguo, como «*ein edler Rat*» (un noble consejero), pero no le concede ninguna importancia.

por eso, siempre acabamos apoyándonos en la confianza de que en lo esencial el otro entiende las palabras, las fórmulas y la construcción de las proposiciones tan bien como nosotros mismos. Como ya dije: no quiero definir, sino sólo dar señas, apelando al sentir general que cualquier hablante tiene de su lengua materna. Lo que me viene muy bien es que las diferencias lingüísticas coinciden con las diferencias del asunto mismo. Para el artículo indeterminado en realidad no hay que señalar ninguna *excepción* a nuestra regla. El asunto no es tan fácil en relación con el artículo determinado sobre todo en plural, pero mi descripción no se refiere a este caso. Para el singular, según lo que he podido observar, solamente surgen dudas cuando el singular se encuentra en lugar del plural como en las proposiciones: «el turco sitió Viena», «el caballo es un cuadrúpedo». Estos casos son tan fáciles de reconocer como especiales, y su presencia no menoscaba prácticamente en nada el valor de nuestra regla. Es claro que en la primera proposición «el turco» es el nombre propio de un pueblo. La mejor manera de eludir la segunda proposición es tratarla como expresión de un juicio general, como «todos los caballos son cuadrúpedos», o «todos los caballos bien formados son cuadrúpedos» pero de ello hablaremos después[7]. Así pues cuando Kerry califica a mi descripción de incorrecta afirmando que en la proposición «el concepto del que hablo ahora es un concepto individual», el nombre compuesto de las primeras seis palabras significa un concepto, entiende así la palabra concepto en un sentido distinto al mío y la contradicción no se halla en mis apreciaciones. Nadie puede sin embargo exigir que la manera de expresarse deba coincidir con la de Kerry.

De ningún modo se puede desconocer que hay una inevitable dificultad de lenguaje cuando afirmamos: el concepto *caballo* no es ningún concepto[8], mientras que, por ejemplo, la ciudad de Berlín es una ciudad y

[7] Me parece que hoy se tiende a exagerar el alcance de la proposición que dice que diferentes expresiones lingüísticas nunca tienen por completo el mismo valor y que una palabra no puede expresarse nunca exactamente en otra lengua. Se podría quizá ir aún más lejos y decir que ni una sola vez la misma palabra será interpretada por personas de una misma lengua de modo completamente igual. No quiero investigar cuánta verdad hay en esta proposición sino sólo subrayar que, no obstante, no es raro que en diferentes expresiones se encuentre algo en común, lo que llamo el sentido, y para las proposiciones en especial, el pensamiento; en otras palabras, no se debe desconocer que se puede expresar de diferente modo el mismo sentido, el mismo pensamiento y que la diferencia, por lo tanto, no es del sentido sino solamente de la interpretación, matiz, coloración del sentido, es decir lo que no toma en cuenta la lógica. Es posible que una proposición no dé ni más ni menos información que otra; a pesar de la variedad de las lenguas tiene la humanidad un tesoro común de pensamientos. Si se quisiera prohibir la reformulación de toda proposición, pretendiendo que si se hace se cambia el contenido, se paralizaría la lógica, pues no puede cumplir su misión si no intenta reconocer al pensamiento bajo sus distintos ropajes. De lo contrario, cada definición sería rechazable también como falsa.

[8] Lo mismo ocurre cuando en relación con la proposición «esta rosa es roja» decimos: el predicado gramatical «es rojo» pertenece al sujeto «esta rosa». Aquí

el volcán Vesubio es un volcán. El lenguaje tropieza con una situación forzosa que justifica la desviación respecto de lo habitual. Que nuestro caso sea uno especial lo indica el mismo Kerry con las comillas en la palabra «caballo» —con el mismo propósito yo uso la cursiva. No hay ningún fundamento sin embargo para distinguir de la misma manera las palabras «Berlín» y «Vesubio». En las investigaciones lógicas a menudo se tiene la necesidad de enunciar algo de un concepto y ello expresarlo en la forma habitual de tales enunciados, de manera que el enunciado mismo sea el contenido del predicado gramatical. En este caso habría que esperar que el concepto apareciese como significado del sujeto gramatical, pero éste, a causa de su naturaleza predicativa, no puede aparecer allí, así sin más, sino que tiene primero que transformarse en un objeto, o para hablar más exactamente tiene que ser representado por un objeto [9] que nosotros designamos anteponiendo las palabras «el concepto», por ejemplo,

«el concepto *hombre* no es vacío».

Aquí se comprenden las tres primeras palabras como nombre propio [10] y tampoco se pueden usar predicativamente como «Berlín» o «Vesubio». Cuando decimos: «Jesús cae bajo el concepto *hombre*» así es el predicado (puesto aparte de la cópula)

«cayendo bajo el concepto *hombre*»

y esto significa lo mismo que

«un hombre».

Pero de este predicado, es sólo una parte la combinación de palabras

«el concepto *hombre*»

Se podría hacer valer contra la naturaleza predicativa del concepto que se habla de un concepto-sujeto. Pero también en tales casos, como por ejemplo en la proposición

«todos los mamíferos tienen sangre roja»,

---

las palabras «el predicado gramatical "es rojo"» no son el predicado gramatical sino el sujeto. Precisamente porque de modo explícito lo llamamos predicado, le quitamos esta propiedad.

[9] *Cf.* mis *Fundamentos*, p. X.

[10] Llamo nombre propio a cada signo de un objeto.

no se puede desconocer la naturaleza predicativa del concepto [11], pues en lugar de esa proposición se puede también decir

«lo que es mamífero tiene sangre roja»

o

«si algo es mamífero ese algo tiene sangre roja».

Cuando escribí mis *Fundamentos de la Aritmética* todavía no había hecho la distinción entre sentido y significado [12] y por eso con la expresión «contenido juzgable» resumía lo que ahora designo distintamente con las palabras «pensamiento» y «valor de verdad». No acepto, pues, textualmente la aclaración dada en la pág. 77 aunque en lo esencial soy de la misma opinión. Entendiendo «predicado» y «sujeto» en sentido lingüístico podemos decir brevemente: concepto es el significado de un predicado, objeto es lo que nunca puede ser significado de un predicado aunque muy bien significado de un objeto. Hay que observar además que las palabras «todos», «cada uno», «algunos» se encuentran delante de las palabras-conceptos. Enunciamos en las proposiciones general y particular afirmativas y general y particular negativas, relaciones entre conceptos e interpretamos la clase especial de esta relación con aquellas palabras («todos», «cada uno», «ninguno», «algunos»), que, por lo tanto, desde el punto de vista lógico, no hay que unir con las palabras-conceptos que les siguen, sino relacionar con la proposición como un todo. Esto se ve claramente en la negación. Si en la proposición

«todos los mamíferos son terrestres»

la combinación de palabras «todos los mamíferos» expresará el sujeto lógico del predicado *son terrestres,* deberíamos, para negar el todo, negar el predicado: son no terrestres. En lugar de ello hay que colocar el «no» antes del «todos» de donde se sigue que «todos» lógicamente pertenece al predicado. Negamos por el contrario la proposición «el concepto *mamífero* está subordinado al concepto *terrestre*» negando el predicado «no está subordinado al concepto *terrestre*».

Si no olvidamos que en mi manera de hablar, expresiones como «el concepto *F*» no designan conceptos, sino objetos, gran parte de las críticas

[11] Lo que aquí llamo naturaleza predicativa del concepto es sólo un caso especial de la necesidad de complementación o de no saturación que en mi artículo *Función y concepto* (Jena, 1891) caracterizo como esencial para la función. En este artículo no se puede evitar la expresión «la función $f(x)$» aunque surge allí también el inconveniente de que el significado de estas palabras no es ninguna función.

[12] *Cf.* mi artículo *Sobre sentido y significado.*

de Kerry quedan contestadas. Cuando piensa (pág. 281) que identifico concepto y extensión del concepto se equivoca. Solamente he dicho que se podría en la expresión «el número cardinal que conviene al concepto *F* es la extensión del concepto *numéricamente igual al concepto F*» sustituir las palabras «extensión del concepto» por «concepto». Se observa aquí, pues, que esta palabra está acompañada por el artículo determinado. Por otra parte es ésta una observación al margen sobre la que no he fundamentado nada.

Mientras que Kerry no logra de ningún modo llenar el abismo entre concepto y objeto, sí se podría utilizar lo que yo he dicho del siguiente modo. He dicho que la aserción numérica [13] contiene un enunciado sobre un concepto, me refiero de este modo a propiedades que se dicen de un concepto y subsumo un concepto en otro superior [14]. A la existencia he llamado propiedad de un concepto. La mejor manera de aclarar lo que pienso es poner un ejemplo. En la proposición «hay por lo menos una raíz cuadrada de 4 no se dice nada ni del número 2 ni del -2, sino que se dice de un concepto, a saber *raíz cuadrada de 4*, que no es vacío. Pero si expreso el mismo pensamiento del siguiente modo: «el concepto *raíz cuadrada de 4* es completo» forman las primeras seis palabras el nombre propio de un objeto, y es de este objeto del que se dice algo. Se observa sin embargo, claramente, que este enunciado no es el mismo que el formulado anteriormente del concepto. Esto solamente sorprende a quien desconozca que un pensamiento se puede analizar de muchas formas, y que por eso, aparece unas veces esto, otras veces lo otro, como sujeto o predicado. En el pensamiento mismo no está determinado lo que se debe tomar como sujeto. Si se dice: «el sujeto de este juicio», se designa únicamente algo determinado, si al mismo tiempo se indica una determinada clase de análisis. En la mayoría de los casos se lo hace así en relación con el texto de una frase determinada. Pero no se tiene que olvidar nunca que distintas proposiciones puedan expresar el mismo pensamiento. De este modo se podría también encontrar en nuestro pensamiento un enunciado sobre el número 4,

> «el número 4 tiene la propiedad de que hay algo cuyo cuadrado es él».

El lenguaje tiene medios para transparentar unas y otras partes del pensamiento como sujeto. Uno de los más conocidos es la diferencia de la forma activa y la forma pasiva. De aquí que sea posible que un mismo pensamiento aparezca en *un* análisis como singular, en otro como particu-

[13] *Cf. Fundamentos*, § 46.
[14] *Cf. Fundamentos*, § 53.

lar, en un tercero como general. No debe pues asombrar que la misma proposición pueda ser interpretada como el enunciado de un concepto y como un enunciado de un objeto, con sólo tener en cuenta que estos enunciados son diferentes. Es imposible en la proposición «hay por lo menos una raíz cuadrada de 4» sustituir las palabras «una raíz cuadrada de 4» por «el concepto *raíz cuadrada de 4*», es decir, el enunciado que conviene a un concepto no conviene a un objeto. Aunque nuestra proposición no deja que aparezca el concepto como sujeto dice sin embargo algo de él. Se podría interpretar como la expresión de que de un concepto cae bajo uno superior [15]. Pero con ello de ningún modo se borra la diferencia entre objeto y concepto. Primero observemos que en la proposición «hay por lo menos una raíz cuadrada de 4» el concepto no niega su naturaleza predicativa. Se puede decir «hay algo que tiene las cualidades de ser multiplicado por sí mismo y dar 4». En consecuencia, no puede ser, decir nunca de un objeto lo que aquí se dice de un concepto, pues un nombre propio nunca puede ser una expresión predicativa, aunque pueda ser muy bien una parte de ella. No quiero decir que sea falso decir de un objeto lo que aquí se dice de un concepto, sino más bien que es imposible, que un tal decir no tiene sentido. La proposición «hay Julio César» no es ni verdadera ni falsa, sino sin sentido, aunque la proposición «hay un hombre con el nombre de Julio César» tenga un sentido; pero nos encontramos de nuevo con un concepto como deja ver la presencia del artículo indeterminado. Lo mismo ocurre en la proposición «Sólo hay una Viena». No nos debemos dejar engañar porque el lenguaje use la misma palabra unas veces como nombre propio y otras como palabra concepto. El adjetivo numeral indica aquí que se trata del último caso. «Viena» es aquí tan palabra concepto como «ciudad imperial». Se puede en este sentido decir «Trieste no es ninguna Viena». Si por el contrario en la proposición «el concepto *raíz cuadrada de 4* es completo», las primeras seis palabras que forman el nombre propio se sustituyen por «Julio César» obtenemos una proposición que tiene sentido pero que es falsa; pues el ser completo, como aquí es entendida esa palabra, puede ser dicho en verdad solamente de una clase muy especial de objetos, a saber aquellos que pueden ser designados con un nombre propio de la forma «el concepto *F*». Las palabras «el concepto *raíz cuadrada de 4*» se comportan desde el punto de vista de su posibilidad de sustitución de modo esencialmente diferente a las palabras «una raíz cuadrada de cuatro» de nuestra frase inicial, esto es, los significados de ambas combinaciones de palabras son esencialmente distintos.

Lo que hemos mostrado por un ejemplo vale en general: el concepto

[15] En mis *Fundamentos* llamé a un tal concepto de segundo orden y en *Función y concepto* de segundo grado, como también lo haré aquí.

se comporta de modo esencialmente predicativo incluso allí donde se dice algo de él; en consecuencia puede solamente ser sustituido con un concepto, nunca con un objeto. Por lo tanto, el enunciado que se hace de un concepto nunca conviene a un objeto. Los conceptos de segundo grado bajo los cuales caen conceptos son esencialmente distintos de los conceptos de primer grado bajo los cuales caen objetos. La relación de un objeto al concepto de primer grado bajo el cual se subsume es diferente de la relación de un concepto de primer grado a un concepto de segundo grado. Para hacer justicia a la diferencia y al mismo tiempo a la semejanza de ambos casos se podría quizá decir que un objeto cae *bajo* un concepto de primer grado y que un concepto y objeto permanece por tanto en toda su radicalidad.

Con esto se conecta lo que dije en el § 53 de *Fundamentos* sobre el modo de usar las palabras «propiedad» y «nota». Los comentarios de Kerry me dan oportunidad de volver al asunto. Ambas palabras sirven para designar relaciones en proposiciones como «Φ es propiedad de Γ» y «Φ es nota de Ω». Según mi manera de hablar, algo puede ser al mismo tiempo propiedad y nota pero no de lo mismo. Llamo a los conceptos bajo los cuales cae un objeto sus propiedades, de manera tal que

«ser Φ es una propiedad de Γ»

es sólo otro giro para

«Γ cae bajo el concepto de Φ».

Si el objeto Γ tiene las propiedades Φ, X y Ψ puedo a todas resumirlas en Ω de modo tal que sea lo mismo decir Γ tiene la propiedad Ω o decir Γ tiene las propiedades Φ y X y Ψ. Llamo pues a Φ, X y Ψ notas del concepto Ω y al mismo tiempo propiedades de Γ. Es claro que la relación de Φ a Γ es completamente diferente de su relación a Ω y por eso se necesita una denominación diferente. Γ cae bajo el concepto Φ; pero Ω que es ella misma un concepto no puede caer bajo el concepto de primer grado Φ, sino que una tal relación solamente la puede tener con un concepto de segundo grado. Por el contrario es Ω subordinado a Φ.

Observemos el siguiente ejemplo. En lugar de decir:

«2 es un número positivo» y
«2 es un número entero» y
«2 es menor que 10»,

podemos también decir

«2 es un número positivo menor que 10».

Aquí aparece

ser número positivo,
ser número entero,
ser menor que 10,

como propiedades del objeto 2 pero al mismo tiempo como notas del concepto

número positivo entero menor que 10.

Este no es ni positivo ni número entero ni más pequeño que 10. Está, sin duda, subordinado al concepto *número entero* pero no cae bajo él.

Comparemos con lo que dice Kerry en el segundo artículo, pág. 424: «Se entiende por número 4 el resultado de la unión aditiva de 3 y 1. El objeto conceptual del concepto dado es el número individuo 4, un número determinado de la serie natural de números. Este objeto porta en sí, en su concepto claramente, las dichas notas. En caso de que, como se debe hacer le separemos de la infinidad de relaciones en las cuales se encuentra con respecto a los otros individuos numéricos y le atribuyamos las notas que sólo le pertenecen en propiedad y ninguna otra, en ese caso, 4 es lo mismo que el resultado de la unión aditiva de 3 y 1.

De inmediato se reconoce que la diferencia hecha por mí entre propiedad y nota está aquí completamente borrada. Kerry diferencia sin embargo entre el número 4 y «el» número 4. Debo confesar que esta diferencia no es completamente incomprensible. El número 4 debe ser el concepto; «el» número 4 debe ser el objeto conceptual y no otra cosa que el individuo numérico 4. Que aquí no se encuentra mi diferencia entre concepto y objeto no necesita demostrarse. Parece casi como si Kerry, aunque muy oscuramente, tuviese la idea de la diferencia que yo pongo entre el sentido y el significado de la palabra «el número 4» [16]. Pero solamente del significado se puede decir que él sea el resultado de la unión aditiva entre 3 y 1.

¿Cómo se debe, pues, entender el «es» en las proposiciones «el número 4 es el resultado de la unión aditiva de 3 y 1»? ¿Es sencillamente cópula o ayuda a expresar la igualdad lógica? En aquel caso debería faltar «el» delante de «resultado» y las proposiciones más o menos dirían:

«el número 4 es resultado de la unión aditiva de 3 y 1»

y

«"el" número 4 es resultado de la unión aditiva de 3 y 1».

[16] *Cf.* mi artículo *Sobre sentido y significado.*

Tendríamos, pues, el caso que los objetos designados por Kerry como

«el número 4» y «"el" número 4»

caen bajo el concepto:

Resultado de la unión aditiva de 3 y 1.

Habría entonces que preguntar en qué se diferencian estos objetos. Uso aquí las palabras «objeto» y «concepto» del modo habitual. Lo que parece que Kerry quiere decir podría expresarlo de la siguiente manera:

«el número 4 tiene como propiedad aquélla y solamente aquella que el concepto
resultado de la unión aditiva de 3 y 1
tiene como nota».

El sentido de la primera de las proposiciones lo expresaría así:

«ser un número 4 es lo mismo que ser resultado de la unión aditiva de 3 y 1»;

y ello a su vez, tal supongo es la opinión de Kerry, podría ser expresado también del siguiente modo:

«el número 4 tiene como propiedad aquélla y solamente aquella que el concepto
número 4
tiene como nota».

Que esto sea o no verdad queda sin discutir. En las palabras «"el" número 4» podríamos entonces quitar las comillas del artículo determinado.

En este intento de interpretación, sin embargo, damos supuesto que el artículo determinado delante de «resultado» y de «número» 4 estaría por lo menos en uno de ambos casos puesto con descuido. Si tomamos las palabras textualmente podemos sólo aprehender su sentido en cuanto igualdad lógica, como «el número 4 no es otra cosa que el resultado de la unión aditiva de 3 y 1».

El artículo determinado delante de «resultado» sólo se puede justificar aquí lógicamente si se reconoce: 1 % que hay un tal resultado, 2 % que no hay más que uno. En este caso esta combinación de palabras designa un objeto y es interpretable como nombre propio. Si nuestras dos

proposiciones se tuviesen que entender como una igualdad lógica se concluiría con ello que, puesto que los lados derechos coinciden, el número 4 sería «el» número 4, o si se quiere, el número 4 no sería otra cosa que «el» número 4, con lo que la diferencia realizada por Kerry se mostraría como superflua. Pero no es mi tarea probar contradicciones en su exposición. Lo que entienda él con las palabras «objeto» y «concepto» no me interesa en absoluto; sólo quiero aclarar mi propia manera de usar estas palabras y con ello mostrar que esa manera es distinta de la de Kerry, sean en sí mismas coherentes o no.

No discuto a Kerry el derecho de usar las palabras «objeto» y «concepto» a su manera; deseo sin embargo, defender para mí el mismo derecho y afirmar que con mi designación he realizado una diferencia importantísima. Un gran obstáculo en el camino del entendimiento con el lector. se produce cuando por una cierta necesidad lingüística, a menudo mi expresión tomada textualmente falsifica el pensamiento, llamando objeto a lo que en realidad mienta un concepto. Soy completamente consciente que en tales casos debo confiar en la buena volutand del lector.

Se pensará quizá que estas dificultades son hechas artificialmente y que no se necesita tener en cuenta algo tan poco manuable como lo que he llamado concepto, y pudiera considerar con Kerry el caer de un objeto bajo un concepto como una relación en la cual *una* vez puede aparecer como objeto, lo que otra vez entra como concepto. Las palabras «objeto» y «concepto» ayudarían en este caso solamente a interpretar la distinta posición en la relación. Se puede hacer así, pero quien pretende creer que con esto evita la dificultad se equivoca: solamente se desplaza; pues las partes de un pensamiento no deben estar todas cerradas, sino que por lo menos una de ellas tiene que tener algo no saturado o predicativo, sino no podrían vincularse entre sí. Así por ejemplo no se vincula el sentido de la unión de palabras «el número 2» a la expresión «el concepto de *número primo*» sin un medio de unión, aplicamos uno de esos medios de unión en la proposición «el número 2 cae bajo el concepto de *número primo*». Está contenido en las palabras «caer bajo» que necesitan un complemento doble: un sujeto y un acusativo o complemento directo; y solamente esta no saturación de su sentido hace que estas palabras sean capaces de servir como medios de unión. En cuanto sean complementadas de este doble modo obtendremos un sentido cerrado, tendremos un pensamiento. Digo, pues en tales palabras o uniones de palabras, que significan una relación. Aparece con la relación la misma dificultad que queríamos evitar en el concepto; pues con las palabras «la relación del caer un objeto bajo un concepto» no designamos ninguna relación, sino un objeto y los tres nombres propios «el número 2», «el concepto de número primo», «la relación del caer de un objeto bajo un concepto» se compor-

tan entre sí de modo tan distinto como los dos primeros. Cualquiera que sea el modo en que los coloquemos juntos no obtendremos ninguna proposición. Así reconocemos fácilmente que la dificultad que aparece en la no saturación de una parte del pensamiento se puede muy bien desplazar pero no evitar. «Cerrado» y «no saturado» son sin duda sólo imágenes, pero aquí quiero y puedo hacer simplemente algunas indicaciones.

El entendimiento de cuanto digo puede facilitarse si el lector tiene presente mi artículo *Función y Concepto*. En la pregunta sobre lo que se llama función en el análisis matemático uno se topa con las mismas dificultades; y una mirada penetrante encontrará que están fundadas en la cosa misma y en la naturaleza de nuestro lenguaje, que no se puede evitar una cierta inadecuación de la expresión lingüística y que no queda más remedio que ser consciente y tener siempre en cuenta esta dificultad.

¿QUE ES UNA FUNCION?

(Homenaje a L. Boltzmann, 1904, pp. 656-666.)

No está aún fuera de duda el significado que tiene la palabra «función» [1] en el análisis matemático, aunque sea de uso corriente desde hace mucho tiempo. En las aclaraciones de lo que sea función siempre volvemos a encontrar dos expresiones en parte unidas entre sí, en parte separadas, la expresión de la suma y la de la variable. Notemos también el uso oscilante en el lenguaje pues unas veces se denomina función lo que determina la clase de dependencia, o quizá la propia clase de dependencias, y otras la variable ligada a la función.

Desde no hace mucho tiempo predomina en la definición la palabra «variable». Pero también ésta, necesita una aclaración. Todo cambio se efectúa en el tiempo. Entonces el análisis debería ocuparse de un suceso temporal en tanto somete la variable a observación. Pero el análisis no tiene nada que ver con el tiempo y que pueda aplicarse a acontecimientos temporales no incide para nada en el asunto. Se encuentran también aplicaciones del análisis a la geometría en los cuales el tiempo no interviene. Esta es una de las dificultades principales con las que siempre nos topamos, cuando queremos llegar al fundamento a través de ejemplos. Pues tan pronto intentemos indicar una variable quedaremos a merced de lo que cambia en el tiempo y por lo tanto de lo que no pertenece al análisis puro. Y no obstante debe ser posible señalar una variable que no lleve consigo nada extraño a la Aritmética, si admitimos que en general las variables son objetos del análisis.

Si hemos encontrado en el cambio una dificultad, topamos con otra nueva cuando preguntamos por lo que cambia. La respuesta que se obtiene en primer lugar es: una cantidad. Busquemos un ejemplo: podemos llamar a una vara una cantidad en tanto tenga longitud. Cada cambio de la vara con respecto a su longitud, como un ejemplo, la que puede resultar con el calor, sucede en el tiempo, o ni vara ni longitud son objetos del análisis puro. Este intento de indicar una cantidad variable en el análisis, fracasa, y del mismo modo fracasarán muchos otros, pues las cantidades de longitud, de superficie, de ángulo, de masa, no son objetos de la Aritmética. De todas las cantidades sólo pertenecen a la Aritmética los números. Y precisamente porque esta ciencia se caracteriza completamente por números obtenidos en casos particulares a través de mediciones de determinadas longitudes, es

[1] Esta reflexión se limitará a funciones con un solo argumento.

capaz de muy variadas aplicaciones. Preguntamos por lo tanto: ¿son las variables del análisis números variables? ¿Qué tendrían que ser además si, en general, pertenecen al análisis? ¿Pero, por qué casi nunca se dice «número variable» y sí por el contrario a menudo «longitud variable»? Parece esta expresión más admisible que «número variable». Entonces crece la duda: ¿Hay números variables? ¿No guarda cada número sus propiedades invariables? Ahora bien, se dice entonces, 3 y π son por supuesto números invariables, constantes; pero no obstante hay también números variables. Si digo por ejemplo, «el número que en milímetros de longitud indica esta vara» denomino un número. Y éste es variable porque la vara no siempre guarda la misma longitud, y por lo tanto designo con cada expresión un número variable. Comparemos este ejemplo con el siguiente: cuando digo «el rey de este reino» designo un hombre. Diez años atrás era el rey de este reino un anciano, ahora es el rey de este reino un joven. Aquí tiene que faltar algo. La expresión «el rey de este reino» no designa sin especificación temporal, ningún hombre; tan pronto se le adjudique una especificación temporal puede designar unívocamente a un hombre; pero entonces es esta especificación temporal parte necesaria de la expresión y obtenemos otra expresión cuando hacemos otra especificación temporal. Por tanto no tenemos en ambas frases de ningún modo el mismo sujeto de la afirmación. De la misma manera la expresión «el número que indica en milímetros la longitud de esta vara» designa sin especificación temporal un número por ejemplo 1.000, pero éste es entonces invariable. Con otra especificación temporal obtenemos otra expresión que puede designar otro número, por ejemplo, 1.001. Cuando decimos: «hace media hora era el número que indicaba en milímetros la longitud de esta vara un número cúbico; ahora el número que indica en milímetros la longitud de esta vara no es un número cúbico», en ambos casos no tenemos el mismo sujeto en la proposición. El 1.000 no se ha hinchado hasta volverse 1.001, sino que ha sido sustituido por él. ¿O es el número 1.000 el mismo que el 1.001 solamente con otra fisonomía? Cuando algo cambia tenemos sucesivas, diferentes, cualidades y estados en el mismo objeto. Pero si él no fuera el mismo no tendríamos ningún sujeto del cual pudiéramos afirmar el cambio. Una vara se dilata con el calor. Mientras esto sucede permanece la misma. Si en lugar de ello se la arroja y se la sustituye por una más larga, no se podría decir que se ha dilatado. Un hombre envejece, pero si no lo podemos a pesar de todo reconocer como el mismo, no tendríamos a nadie del cual podríamos decir la edad. Apliquemos esto al número. ¿Si cambiamos un número qué queda del mismo? Nada. En consecuencia no se cambia de ningún modo un número, pues no tenemos nada respecto de lo cual podríamos predicar el cambio. Un número cúbico no se transformará nunca en un número primo y uno

irracional no se transformará nunca en uno racional. No hay por lo tanto ningún número variable, y esto se prueba con el hecho de que no tenemos ningún nombre propio para el número variable. El intento de designar un número variable con la expresión «el número que indica en milímetros la longitud de esta vara» nos ha fallado. Pero ¿no designamos con «x», «y», «z» números variables? Con gusto se usa este modo de hablar, pero estas consonantes no son nombres propios de números variables como «2» y «3» son nombres propios de números constantes, pues los números 2 y 3 se diferencian en la forma de darse, pero ¿cómo se diferencian las supuestas variables que designamos con «x» y con «y»? Esto no se dice. No podemos decir qué cualidades tiene x y qué cualidades distintas de ésta tiene y. Si con estas consonantes unimos en general algo, es en ambas la misma vaga representación. Donde aparecen las diferencias virtuales es en las aplicaciones, pero de éstas aquí no hablamos. Resulta que como no estamos en condiciones de comprender cada variable en su especificidad no podemos adjudicar ningún nombre propio a las variables.

E. Czuber ha intentado evitar algunas de las dificultades existentes. Para librarse del tiempo explica la variable como un número indeterminado. Pero ¿hay números indeterminados? ¿Se pueden dividir los números en determinados e indeterminados? ¿Hay nombres indeterminados? ¿No debe ser cada objeto un objeto determinado? ¿No es indeterminado el número n? No conozco al número n. «n» no es el nombre propio de ningún número, ni de uno determinado ni de uno indeterminado. Y no obstante se dice a menudo «el número n». ¿Cómo es posible? Observemos tales expresiones en conexión con otras. Tomemos un ejemplo: «si el número n es entero así es $\cos n\pi = 1$. Para responder debería ser «n» el nombre propio de un número necesariamente determinado. Se escribe la consonante «n» para alcanzar una generalidad. Con ello va supuesto que si se la sustituye con un nombre propio, tanto la proposición condicional como la proposición consecuente obtienen un sentido.

Por cierto, aunque se puede en este caso hablar de «indeterminación», no obstante no es «indeterminado» ningún adjetivo de «número», sino un adverbio que modifica «designar», pues no se puede decir que «n» designe un número indeterminado pero sí que indica «indeterminadamente» números. Y así ocurre siempre cuando se usan letras en la Aritmética, con excepción de algunos pocos casos ($\bar{x}$, e, i) donde figuran como nombres propios, pero entonces designan números determinados invariables. No hay por lo tanto ningún número indeterminado y el intento de E. Czuber ha fracasado.

En segundo lugar busca remediar que no se puede captar una variable diferenciándola de otras. Czuber lo llama la totalidad del valor que puede admitir una variable, la región de la variable, y dice: «la varia-

ble x vale como definida si de cada número real que se designa puede convenirse si pertenece o no a la región». Vale como definida pero ¿lo es? Como no hay ningún número indeterminado es imposible definir algún número como indeterminado [2]. La región se expone como la que caracteriza la variable. De ahí que tendríamos para la misma región las mismas variables. En consecuencia sería en la igualdad «$y=x^2$» y la misma variable que x, si la región de x es la de los números positivos.

Este intento debe ser considerado fracasado, especialmente la expresión «una variable admite un valor» es completamente confusa. Una variable debe ser un número indeterminado. ¿Cómo hace un número indeterminado para admitir un número?, pues el valor es manifiestamente un número. ¿Se cambia también un hombre indeterminado en uno determinado? Por otra parte se dice que un objeto acepta una propiedad; aquí debe jugar el número ambos papeles: como objeto será llamado variable o cantidad variable, como propiedad se llamará valor. Se prefiere la palabra «cantidad» a la palabra «número» porque uno se quiere engañar creyendo que la cantidad variable y el valor que ella supuestamente admite no son en lo fundamental lo mismo. Y que no se está de ningún modo en el caso de un objeto que sucesivamente admita distintas propiedades. Pero de esto se trata y por lo tanto, no se puede hablar de ningún cambio.

Con respecto a las variables hemos logrado lo siguiente. Las cantidades variables pueden ser reconocidas pero no pertenecen al análisis puro. Números variables no hay. Según todo esto no tiene la palabra «variable» ningún derecho en el análisis.

Cómo llegamos de la variable a la función? Sucede en lo esencial, siempre del mismo modo por eso continuamos la exposición de Czuber, escribe en § 3:

«Si se adjunta, a cada valor de la variable real x, perteneciente a su región, un número determinado y, es y en general definida también como variable y se llama una función de las *variables reales* x. Se expresa este estado de cosas con una igualdad de la forma $y=f(x)$».

Lo primero que nos sorprende es que se llame a y número determinado cuando debería ser, en cuanto variable, uno indeterminado. y no es ni un número determinado ni uno indeterminado; el signo y se agrega de una manera falsa a muchos números y no obstante se habla como si fuera uno solo. El caso sería, sin duda, más fácil y más claro de exponer así: a cada número de una región x se le adjunta un número. A la totalidad de estos números llamo la región y. Claro que tenemos sin

---

[2] *Lecciones sobre cálculo diferencial e integral,* Leipzig, Teubner, 1, p. 2.

duda una región y, pero ninguna y de la que pudiéramos decir que sea una función de las variables reales x.

Parece, pues, ser inesencial la limitación de la región para la pregunta por la esencia de la función. ¿Por qué no podemos admitir también como región la totalidad de los números reales o la totalidad de los números complejos? No obstante el centro del asunto está en otra parte, esto es, escondido en la palabra «adjudicar». ¿Dónde noto yo si el número 5 está adjudicado al número 4? La pregunta no se puede contestar si no se completa de algún modo. No obstante, según la aclaración de Czuber, parece como si estuviera determinado para dos números tanto si el primero se adjudicara o no al segundo. Czuber añade felizmente la observación:

«Sobre la *ley* de la adjudicación designada de manera general con la *característica f*, no contiene la citada definición ninguna proposición; puede ser convenida de muchas maneras.»

Por lo tanto, la adjudicación acontece según una ley y se pueden pensar diferentes formas de tales leyes. No tiene entonces la expresión «y es una función de x» ningún sentido si no se completa con la especificación de una ley según la cual acontece la adjudicación. Hay aquí una falta en la definición. ¿Y no es esta ley, que la aclaración no toma en cuenta lo principal? Notemos que con esto la variabilidad desaparece por completo de nuestra mirada, en tanto que la generalidad entra en nuestro círculo de problemas, pues a ella designa la palabra «Ley».

Las diferencias de las leyes de adjudicación están unidas a las diferencias de las funciones y ya no podrán entenderse como cuantitativas. Pensemos en las funciones algebraicas, en las funciones logarítmicas, en las funciones elípticas; nos convencemos en seguida que se trata de una diferencia cualitativa, un fundamento más para no explicar las funciones como variables. Si fueran variables, serían las funciones elípticas, variables elípticas.

En general, expresamos una tal ley de la adjudicación con una igualdad en la cual está, en la izquierda la letra «y» mientras que, en la derecha, aparece un cálculo compuesto de signos numéricos, el signo de suma, y la letra «x» como, por ejemplo,

$$«y=x^2+3x».$$

Se define la función, pues, como tal cálculo. Recientemente se ha considerado este concepto demasiado estrecho. De todos modos se podría evitar tal situación con la introducción de nuevos signos en el lenguaje simbólico de la Aritmética. Es de más peso otra objeción, a saber, que la expresión del cálculo como grupo de signos no pertenece a la Aritmética. La teoría formalista que indica como objetos de esta ciencia a los signos

la doy por terminada con la crítica que hago en el segundo tomo de mis «Leyes fundamentales de la Aritmética». El signo y lo designado no siempre se diferencian, nítidamente, de modo tal que se ha visto en la expresión del cálculo *(expressioanalytica)* un poco también la expresión de su significado. ¿Qué designamos, pues, con «x^2+3x»? Propiamente nada ya que la letra «x» indica solamente números, pero no designa. Sustituyamos «x» por el signo de un número, así obtenemos una expresión que designa un número, por lo tanto, nada nuevo. Como «x», la expresión «x^2+3x» solamente indica. Esto permite expresar la generalidad como, por ejemplo, en las proposiciones

$$«x^2+3x=x \cdot (x+3)»,$$
$$«\text{si } x > 0, \text{ entonces es } x^2+3x > 0».$$

Pero ¿dónde permanece entonces la función? Ni la expresión del cálculo ni su significado parece que puedan aprehenderse. No obstante, no estamos demasiado lejos de lo correcto. En las expresiones «sen 0», «sen 1», «sen 2» significa cada una un número específico, pero tenemos una componente común «sen», en la cual encontramos designada la esencia propiamente dicha de la función seno. Este «sen» corresponde bien al «f» del cual Czuber dice que indica la ley y sin duda es el pasaje «f» a «sen» semejante del de «a» a «2», un pasaje del signo que anuncia al signo que designa. Según esto significaría «sen» una ley. Claro que esto no es del todo cierto. La ley nos parece más bien que se expresa en la igualdad «$y=\text{sen } x$» de la cual es el signo «sen» sólo una parte, aquella que tipifica la especificidad de la ley. ¿Y no tenemos aquí lo que buscamos, la función? Por tanto, indica «f», tomada con precisión, una función. De este modo, encontramos cómo se diferencian las funciones de los números. El «sen» necesita de un complemento con un signo numérico, pero esto no pertenece al designar de la función. Esto vale en general: el signo de una función no está saturado, necesita complementarse con un signo numérico que denominamos signo del argumento. Vemos también en el signo de la raíz, en el signo del logaritmo. Los signos de función no pueden entrar sólos como los signos numéricos a un lado de la igualdad, sino complementados con un signo que designe o indique un número. ¿Qué significa entonces una tal unión de un signo de función y de un signo numérico, como «sen 1», «$\sqrt{1}$», «log 1»? En cada caso un número. Así obtenemos signos numéricos que están compuestos de dos partes desiguales, en tanto que la parte no saturada se complementa con otros signos.

Se puede hacer visible esta necesidad de complementación con paréntesis vacíos, por ejemplo «sen ( )» o «$(\ )^2+3 \cdot (\ )$». Aunque este procedi-

miento es propiamente el que más responde a los hechos y el más apropiado para defendernos del embrollo que se origina de ver la argumentación como parte del signo de la función, semejante forma de señalar no encontrará ninguna acogida[3]. A este efecto se puede usar también una letra. Elijamos como tal «ξ» así son «sen ξ» y «$\xi^2+3\cdot\xi$» signos de funciones. Pero debe convenirse que «ξ» solamente tiene la tarea de hacer conocer los lugares donde tiene que entrar el signo que complementa la función. Será bueno de no usar esta letra para ningún otro fin, por ejemplo, no en lugar de «x» que en nuestros ejemplos sirve a la expresión de la generalidad.

Una carencia del designar usual del cociente diferencial es que la letra «x» tanto haga conocer los lugares del argumento como que sirva a la expresión de la generalidad, como en la igualdad:

$$«\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}»$$

De esto resulta una dificultad. Según los principios generales del uso de letras en la Aritmética se debería encontrar un caso especial si por «x» se reemplaza un signo numérico. Pero la expresión

$$«\frac{d\cos\frac{2}{2}}{d2}»$$

no se entiende porque la función no se puede conocer. No sabemos si es

$$\cos\frac{(\,)}{2}\text{ ó }\cos\frac{2}{(\,)}\text{ ó }\cos\frac{(\,)}{(\,)}$$

Por consiguiente tenemos necesidad de una forma minuciosa de escribir

$$«\left(\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}\right)x=2»$$

Pero la gran contrariedad es, sin duda que se dificulta la observación de la esencia de la función.

[3] Por otra parte está solamente pensado para los casos excepcionales donde se quiere designar una función completamente aislada. En «sen 2» ya designa «sen» solamente la función.

Lo propio del signo de la función que hemos llamado no saturación corresponde, naturalmente, a algo en la propia función. Podríamos llamar a las funciones mismas *no saturadas* y tipificarlas, de modo que se diferencien fundamentalmente de los números. Claro que no es ninguna definición, pero tal cosa tampoco es aquí posible [4]. Por esta razón me limito a referir con una expresión gráfica lo que pienso y tengo que conformarme con el entendimiento propicio del lector.

Si una función se complementa con un número, da un número, así llamamos a éste el valor de la función de «x». En ello hay dos faltas: primero, se traduce el signo igual por medio de la cópula. Segundo, se confunde la función con su valor respecto de un argumento. De estas faltas se originó la opinión que la función es un número aun cuando un número variable o indeterminado. Por el contrario, hemos visto que no hay tales números, y que las funciones son fundamentalmente diferentes de los números.

El esfuerzo por la brevedad ha introducido muchas expresiones imprecisas en el lenguaje matemático, y éstas han enturbiado retroactivamente al pensamiento y producido definiciones erróneas. Las matemáticas deberían ser propiamente un modelo de claridad lógica. En realidad no se encontrará quizá en los escritos de ninguna ciencia más expresiones torcidas y en consecuencia más pensamientos torcidos que en las matemáticas. Nunca se debería sacrificar la corrección lógica a la brevedad de la expresión. Por eso es de gran importancia construir un lenguaje matemático que una en lo posible con la más estricta precisión, la brevedad. Para esto será muy apropiado un *Concepto grama,* una totalidad de reglas según las cuales uno se pueda expresar con signos escritos o impresos sin la intervención de la articulación sonora.

[4] La definición que da H. Hankel en sus *Investigaciones sobre las funciones infinitas, a menudo oscilantes e inestables* (Programa universitario, Tubingen, 1870), p. 1, es inutilizable a causa de un círculo vicioso, en tanto contiene la expresión «$f(x)$», que supone para la aclaración, el definiendo.

LA LOGICA EN LA MATEMATICA *

(Primavera de 1914.)

La matemática está más estrechamente ligada a la lógica que otras ciencias, pues casi toda la actividad del matemático radica en el deducir. En ninguna otra ciencia ocupa el deducir un espacio tan grande, si bien la deducción también aparece, aquí y allá, en las otras ciencias. Fuera de la deducción, también la definición pertenece a la actividad del matemático. La definición carece por completo de importancia en la mayoría de las ciencias, sólo tiene alguna en la ciencia jurídica, pues ésta se acerca en muchos aspectos a la matemática, aunque el objeto de su investigación sea completamente diferente. La ciencia jurídica obtiene sus materiales de la experiencia histórica y psicológica, esta experiencia ocupa pues bastante espacio en ella. En la matemática falta este elemento.

Pero la deducción y la definición dependen de leyes lógicas. De esto se sigue que la lógica tiene para la matemática mayor importancia que para las otras ciencias.

Si se adscribe la lógica a la filosofía, resulta una relación especialmente estrecha entre matemáticas y filosofía, lo que se confirma a través de la historia de la ciencia (Platón, Descartes, Leibniz, Newton, Kant).

¿Pero no hay quizá en la matemática modos propios de deducción que no dependen de la lógica? Para ello podríamos remitirnos a la deducción de n en $n+1$, es decir, la inducción de Bernoulli. Cualquiera de los modos propios de deducción de la matemática debe estar también sujeto a una ley. Y esta ley, si no es una ley propiamente lógica, pertenecerá a la matemática; se la podrá, por lo tanto, agregar a los axiomas y a los teoremas de esta ciencia. La inducción de Bernoulli, por ejemplo, descansa en la ley que se expresa así:

Si el número 1 tiene la propiedad Φ, y si en general se puede decir de todo número entero positivo n que, si tiene la propiedad Φ también la tendrá $n+1$, entonces todo número entero positivo tiene la propiedad Φ.

Si esta ley se puede probar, se la ordenará entre los teoremas de la matemática y en otros casos entre los axiomas. Cuando se deduce según el principio de Bernoulli, se hace en rigor una aplicación de este teorema

---

* Publicado por Hermes-Kambartel-Kaulbach, en GOTTLOB FREGE: *Nachgelassene Schriften* (Escritos póstumos), Tomo I, Félix Meiner Verlag, Hamburgo, 1969.

o axioma de la matemática, esto es, se toma esta verdad como premisa de una conclusión. Ejemplo: prueba de la proposición

$$(a+b)+n=a+(b+n).$$

Por otra parte, se podrá también reducir un modo propio de deducción de la matemática a una ley general, si no de la lógica, de la matemática misma. Y de esta ley se extraen luego conclusiones según las leyes lógicas generales.

Observemos en forma más precisa lo que ocurre en la matemática comenzando por la deducción.

Podemos diferenciar dos clases de deducción: deducción de dos premisas y deducción de una premisa.

El progreso en la matemática se dará pues al elegirse una o dos verdades ya conocidas como premisas de una conclusión. La proposición conclusiva que se logre de este modo es una nueva verdad de la matemática. Y esta puede unirse de nuevo, sola o con otras verdades, para ser usada en otra deducción. Sería posible llamar teorema a cada verdad alcanzada de este modo. Pero habitualmente se llama teorema sólo a una verdad tal que no solamente sea alcanzada mediante una deducción, sino que ella misma sea usada como premisa, no sólo para una, sino para varias deducciones en la construcción de una ciencia. Así se forman cadenas de conclusiones entre las verdades, y tanto más progresa la ciencia cuanto más se alargan las cadenas de conclusiones; y cuanto más numerosas se vuelven éstas, más se amplía la variedad de los teoremas.

Pero se puede también retroceder en la cadena de las deducciones, preguntando en cada teorema por las verdades de las que fue deducido. Si al progresar en la cadena de deducciones se aumenta la variedad de los teoremas, del mismo modo, al retroceder en ella se estrechará cada vez más el círculo. Mientras que la posibilidad de ir adelante parece ilimitada, el retroceso, en cambio, debe terminar alguna vez, en tanto conduzca a verdades que por sí mismas no pueden surgir de otras. Así topamos con los axiomas, postulados, quizá también con las definiciones. Pero esto será observado luego con más detenimiento. Si seguimos retrocediendo a partir de un teorema en la cadena de deducciones hasta llegar a otros teoremas o axiomas, postulados o definiciones, encontramos la cadena de deducciones que, partiendo de los teoremas, axiomas, postulados o definiciones conocidos, termina en nuestro teorema. Todas estas cadenas de deducciones constituyen la *prueba* de nuestro teorema. Podemos decir que la prueba, partiendo de una verdad reconocida por medio de la cadena de deducciones, conduce al teorema. Pero también es posible que la prueba radique en una sola deducción. En la mayoría de los casos

la prueba pasará por verdades que no son llamadas teoremas porque sólo aparecen en esta prueba y que nunca se utilizan de otro modo. La prueba no sólo debe convencernos de la verdad de lo probado, sino que debe también descubrir la conexión lógica de las verdades entre sí. Por eso Euclides ya probaba verdades que sin necesidad de prueba parecían evidentes.

La ciencia tiene la necesidad de probar aquello que de algún modo está para ser probado, y no descansar hasta dar con algo que no se puede probar. La ciencia tiene que esforzarse por estrechar tanto como sea posible el círculo de las *primeras verdades* no susceptibles de prueba, pues en estas verdades está contenida la totalidad de la matemática como en un germen. Entonces se tratará solamente de desarrollar este germen. La esencia de la matemática debe ser determinada por medio de este germen, y no se llegará a esclarecer lo que la matemática realmente es, antes de que hayan sido conocidas estas primeras verdades. Admitamos que sea posible encontrar cada primera verdad y desarrollar a partir de ellas la matemática, en este caso ésta se presentará como un sistema de verdades unidas unas con otras por medio de deducciones lógicas.

Esta idea de *sistema* ya había sido entrevista por Euclides, pero no alcanzó a desarrollarla, y parece como si nosotros estuviéramos aún más lejos de esa meta. Vemos a los matemáticos trabajar cada uno independientemente en un área, pero estas áreas no se reúnen en un sistema pues la idea de sistema parece casi haberse ido perdiendo. Y sin embargo es legítimo esforzarse por el sistema. La falta de conexión que hoy impera no puede contentarnos por mucho tiempo. Sólo a través del sistema se puede construir el orden. Y a su vez, para la construcción del sistema hay que exigir que cada paso se realice con conciencia del deducir lógico.

El que deduce debe saber lo que son sus premisas. No debe admitirse la confusión de las premisas con las puras leyes lógicas de la deducción; con esto se perdería la pureza lógica de la deducción. Y en esta confusa mezcla no se diferenciarían suficientemente las premisas. Si no se reconocen con claridad las premisas, no es posible volver a alcanzar con seguridad las primeras verdades, y sin éstas no se puede construir el sistema. Por eso hay que rechazar giros como «una ligera reflexión nos enseña que» o «como se ve fácilmente». Esa ligera reflexión debe ser enunciada de manera que se vea en qué deducciones radica y qué premisas se utilizan en ella. En matemática no se debe descansar cuando algo es evidente, siino que hay que esforzarse por una clara inteligencia de la trama de deducciones que apoya ese convencimiento. Sólo así podemos encontrar las verdades primeras, sólo así podemos construir el sistema.

Observemos ahora más de cerca los axiomas, postulados y definiciones.

Los axiomas son verdades como los teoremas, pero unas verdades tales que en nuestro sistema ni son probadas ni necesitan prueba. De esto se sigue que no hay axiomas falsos, que tampoco podemos reconocer como axioma ningún pensamiento cuya verdad sea dudosa, pues entonces, o es falso y por lo tanto no es un axioma, o es verdadero pero necesita una prueba y entonces tampoco lo es. No toda verdad que no necesita prueba es necesariamente un axioma, pues en su caso podría ser probada en el interior de nuestro sistema. Que una verdad sea o no axioma depende pues también del sistema; y es posible que una verdad sea axioma en un sistema y no lo sea en otros. Es decir, es concebible que haya una verdad *A* y una verdad *B*, cada una de las cuales puede estar en relación con verdades *C, D, E, F*, mientras que las verdades *C, D, E, F* por sí solas no bastan ni para la prueba de *A* ni para la prueba de *B*. Ahora bien, si *C, D, E, F* son posibles como axiomas, tenemos la opción de considerar *A, C, D, E, F* como axiomas y *B* como teorema, o *B, C, D, E, F* como axiomas y *A* como teorema. Vemos así que la posibilidad de un sistema no necesita excluir la posibilidad de otro y que quizá tengamos opción entre diferentes sistemas. Por eso, sólo se podrá hablar propiamente de axioma en vista de un sistema determinado.

Aquí cabría una observación acerca de la expresión «*pensamiento*» y «*proposición*». Con la palabra «proposición» denomino un signo que, por regla general, es complejo, sean sus partes habladas o escritas. Este signo debe, naturalmente, tener un sentido. Aquí sólo quiero tener en cuenta proposiciones en las que enunciamos o afirmamos algo. Una proposición puede ser traducida a otra lengua. La proposición en otra lengua es diferente de la original, pues constará de partes (sonidos) diferentes y ordenadas de manera distinta; pero si la traducción es buena expresará el mismo sentido. La proposición tiene valor para nosotros en virtud del sentido que en ella comprendemos y reconocemos como el mismo en la traducción. A este sentido llamo pensamiento. Lo que nosotros probamos no es la proposición, sino el pensamiento. Y es indiferente qué lenguaje usemos para ello. Claro que a menudo en la matemática se habla de prueba de una tesis, entendiéndose con la palabra «proposición» lo que yo llamo pensamiento, o quizá no se diferencia con exactitud entre la expresión de la palabra o del signo y el pensamiento expresado. Pero en bien de la claridad es mejor hacer una diferencia. El pensamiento no es perceptible por los sentidos, pero nosotros le otorgamos en la proposición un representante audible y visible. Por eso no digo «tesis» sino «teorema», no «principio» sino «axioma», y entiendo por teoremas y axiomas pensamientos verdaderos. Pero con ello también estamos diciendo que el pensamiento no es nada subjetivo, no es un producto de nuestra actividad psíquica, pues el pensamiento contenido en el teorema de Pitágoras es

para todos el mismo y su verdad es completamente independiente de si es pensado o no por alguien. El pensar no debe ser considerado como el producir un pensamiento, sino como el aprehender un pensamiento.

Los *postulados* parecen ser, por lo pronto, esencialmente diferentes de los axiomas. En Euclides encontramos el postulado: «Desde todo punto se puede trazar una recta hacia cualquier otro punto.»

Esto se refiere manifiestamente a las construcciones. Los postulados, según parece, realizan las más simples actividades mediante las cuales pueden ser hechas las construcciones y promueven su posibilidad. En un principio podría pensarse que con esto nada se ha ganado para las pruebas, sino sólo para la solución de tareas. Pero sería un error, pues a veces se necesita para la prueba una línea auxiliar, a veces también un punto auxiliar, un número auxiliar o, en general, un objeto auxiliar. Objeto auxiliar es en la prueba de un teorema un objeto del cual en el teorema mismo nada se dice, pero que se usa en la prueba de tal modo que ésta se desarticularía si no hubiera un tal objeto. Y si no hay ninguno, tenemos que poder crearlo, al parecer, y necesitamos de un postulado para asegurarnos esa posibilidad. Pero, ¿qué es propiamente trazar una línea? En todo caso no es ninguna línea en el sentido de la Geometría, lo que hacemos cuando trazamos una raya con un lápiz, y ¿cómo uniríamos de esta manera un punto que se encuentra en Sirio con uno que se encuentra en Rigel? Nuestro postulado no se refiere a un acto tan exterior como ése. Se trata más bien de algo intelectual. No de la posibilidad psicológica o subjetiva, sino de la objetiva. De nuestro hacer no puede depender propiamente la verdad de un teorema, ella es totalmente independiente de nosotros. Por lo tanto no podemos aprehender una cosa de otra manera que trayendo a nuestra conciencia lo que existe sin nosotros cuando trazamos una línea recta. El contenido esencial de nuestro postulado es por lo tanto el de que para dos puntos hay una línea recta que los une. El postulado es, pues, una verdad como el axioma y sólo tiene la particularidad de que en él se afirma que habría algo con determinadas cualidades. De esto se sigue que, en rigor, no es necesario hacer diferencias entre axiomas y postulados. El postulado puede ser visto como una clase especial de axioma.

Llegamos así a las *definiciones*. De las definiciones propiamente dichas hay que diferenciar las *aclaraciones*. Cuando comenzamos a hacer ciencia no podemos evitar el uso de las palabras de nuestra lengua. Pero estas palabras no son, en la mayoría de los casos, apropiadas para objetivos científicos porque no son suficientemente determinadas y su uso es vacilante. La ciencia necesita expresiones artificiales que tengan significados completamente determinados y fijos; y para entenderse sobre estos significados y excluir malentendidos se hacen aclaraciones. Es cierto que para

ello sólo se pueden usar otra vez las palabras de nuestra lengua, las que quizá tienen carencias parecidas a aquellas que la aclaración debería remediar. Serán otra vez necesarias nuevas aclaraciones. Desde el punto de vista teórico no se llega nunca propiamente a nuestra meta, pero en la práctica nos hacemos entender sobre los significados de las palabras. Por cierto que se debe contar con un interlocutor dispuesto al entendimiento de lo que se contempla. Pero todo esto es previo a la construcción del sistema y no pertenece propiamente a él. En la construcción misma se debe suponer que las palabras tienen significados determinados y conocidos. Aquí podemos pues dejar a un lado el problema de las aclaraciones y considerar ya la construcción del sistema.

En ella puede aparecer repetidamente el mismo grupo de signos, ya se trate de sonidos, o de combinaciones de sonidos o de signos escritos; ello nos llevará a introducir un signo simple para dicho grupo, conviniendo que este signo simple siempre estará en lugar de aquel grupo. Puesto que la proposición es, en general, un signo complejo, también es complejo el pensamiento que ella expresa, y de manera tal que a partes del pensamiento corresponden partes de la proposición. De este modo, también un grupo de signos dentro de una proposición tendrá su sentido, que es parte del pensamiento que la proposición expresa. Así, pues, como ya dijimos, cuando para un grupo de signos se introduce un signo simple, dicha estipulación es una definición. Entonces el signo simple posee un sentido, esto es, el mismo sentido que tiene el grupo de signos. No se puede decir que la definición sea absolutamente necesaria para el sistema. El grupo de signos podrá conservarse cada vez que aparezca. Con la introducción de signos simples no se introduce nada nuevo respecto del contenido. Sólo la expresión se hace más fácil, más manejable. De modo que la definición sólo tiene que ver con los signos. Llamemos al signo simple expresión aclarada, y al grupo de signos que aquél sustituye, expresión aclarante. El signo aclarado adquiere sentido sólo en virtud de la expresión aclarante y se constituye a partir de los sentidos de las partes de la expresión aclarante. De esta manera la aclaración constituye el sentido de un signo, no a partir de componentes más simples, sino tratándolo como un sentido simple; ella nos defiende de los malentendidos de las expresiones de muchos sentidos.

Una vez que se ha dado un significado a un signo mediante una definición, dicho significado se mantiene desde ese momento, y la definición pasa a ser una proposición que afirma una identidad. Por cierto que ella contiene sólo una tautología, que no amplía nuestros conocimientos. Contiene una verdad tan obvia que parece vacía de contenido, y sin embargo se la usa en la construcción del sistema como aparente premisa. Digo *aparente* porque lo que en ella se expone en forma de una conclusión no

aporta ningún conocimiento nuevo sino que, en el fondo, sólo produce un cambio de expresión al cual se podría renunciar si no se prefiriera simplificar la expresión. En efecto, no debe admitirse la posibilidad de probar mediante una definición una verdad que, sin ella, no podría ser probada. Si verdaderamente lo que se presenta como definición es lo único que hace posible la prueba de una verdad, entonces no se trata de una definición pura; algo ha de haber en ella que debería ser probado como teorema o reconocido como axioma. Quizá podrá parecer que sólo una definición pudiera hacer posible una prueba. Pero en este caso hay que diferenciar entre la definición y el pensamiento en ella expresado. Si en una proposición aparece la expresión aclarante y nosotros la sustituimos por el signo aclarado, ello no cambia nada en el pensamiento. Obtenemos, es cierto, otra proposición, pero no otro pensamiento. Si queremos probar este pensamiento haciéndolo aparecer en la forma de una segunda proposición, para ello necesitamos, claro está, de la definición. Pero aun si el pensamiento puede ser probado de este modo, también se lo puede probar haciéndolo aparecer bajo la forma de la primera proposición, sin que para ello sea necesaria la definición. Así pues, si se toma a la proposición como aquello que se quiere probar, entonces la definición puede ser esencial; en cambio no lo es si lo que ha de ser probado es el pensamiento.

Por eso parece que, en rigor, la definición sería inesencial. En efecto, observada desde el punto de vista lógico, la definición aparece como completamente inesencial y superflua. Sé bien que contra esto pueden surgir fuertes objeciones. Se dirá quizá que en la definición se efectúa un análisis lógico. Así como hay gran diferencia entre analizar o no un cuerpo químicamente para ver de qué elementos se compone, del mismo modo importa si en una construcción lógica hacemos un análisis lógico para conocer sus elementos o si la dejamos sin analizar como si fuera simple mientras que, de hecho, es compleja. Es imposible caracterizar la actividad de definir como algo completamente sin importancia, teniendo en cuenta el no poco trabajo intelectual que es necesario para establecer una buena definición. Hay ciertamente algo de verdad en estas objeciones, pero antes de seguir con este tema quiero destacar una cosa. La poca importancia lógica no es de ninguna manera una falta de importancia psicológica. Si observamos nuestro trabajo intelectual como realmente se produce, hallamos que de ningún modo un pensamiento se encuentra en nuestra conciencia claro en todas sus partes. Si, por ejemplo, usamos la palabra «integral», ¿somos conscientes de todo lo que pertenece al sentido de esta palabra? Creo que sólo en muy raros casos. Por lo general, estará solamente la palabra en nuestra conciencia, pero asociada al conocimiento más o menos oscuro de que esta palabra es un signo que tiene

un sentido, y que nosotros podemos recordar este sentido cada vez que queremos. Pero la mayoría de las veces nos contentamos con la conciencia de poder recordarlo. Si quisiéramos recordar todo lo que pertenece al sentido de esta palabra no daríamos un paso adelante. Nuestra conciencia no es suficientemente abarcadora. A menudo necesitamos un signo con el cual unir un sentido muy complejo. Este signo nos sirve de recipiente, por así decir. En él podemos llevar siempre con nosotros ese sentido de la conciencia, podemos abrir este recipiente si llegamos a necesitar su contenido. De esta observación resulta que el pensamiento, como yo entiendo la palabra, de ningún modo coincide con el contenido de mi conciencia. Si tenemos necesidad de tales signos en los que, por así decir, a un sentido muy complejo lo depositamos como en un recipiente, así necesitamos definiciones por medio de las cuales introducimos ese sentido en el recipiente, y mediante las que ese sentido, a su vez, puede ser sacado de allí. Aunque según lo anterior las definiciones, vistas desde el punto de vista lógico, son totalmente inesenciales, ellas tienen sin embargo una gran importancia para el pensamiento tal como él se desarrolla verdaderamente en nosotros, los seres humanos. Antes se mencionó una objeción según la cual con la definición se realizaría un análisis lógico. En efecto, puede ocurrir que, en el desarrollo de la ciencia, se haya usado mucho tiempo una palabra, un signo, una expresión, habiendo visto un sentido como simple hasta que se llegó a analizarlo en componentes lógicos más simples. Por medio de un análisis tal se puede esperar que disminuya la cantidad de los axiomas, pues una verdad que contiene componentes complejos no puede quizá ser probada mientras estos componentes sigan siendo no analizables; pero puede quizá ser probada a partir de verdades que surgen del análisis de las partes obtenidas. Así parece ser que por medio de una definición, en tanto cuanto ella efectúa un análisis, puede ser posible una prueba que sin ese análisis no sería posible. Y esto parece plantearnos una contradicción con lo dicho anteriormente. Lo que antes del análisis puede parecer un axioma, después del análisis puede aparecer como un teorema.

¿Respecto de qué se puede juzgar si un análisis lógico es correcto? En realidad no se puede probar. A lo sumo es posible comprobar que textualmente la proposición, después del análisis, puede seguir siendo la misma que antes; pero que también el pensamiento siga siendo el mismo, es cuestionable. Cuando creemos haber analizado lógicamente el sentido de una palabra o un signo que desde hace tiempo ha sido usual, hemos obtenido una expresión compleja cuyas partes son conocidas según su sentido. De ahí debe surgir el sentido de esta expresión compleja: ¿pero coincide este sentido con el de la palabra habitualmente usada? Esto sólo se podrá afirmar, creo yo, si es inmediatamente manifiesto. En ese

caso se tiene con ello un axioma. Pero esta coincidencia de los sentidos de los signos simples ya largamente usados, con las expresiones complejas ahora construidas, es lo que en rigor debería ser comprobado por la definición. Tenemos pues dos casos completamente distintos para diferenciar.

1) Constituimos un sentido partiendo de sus elementos e introducimos un signo completamente nuevo para expresar ese sentido. A esta definición se la puede llamar «definición constructiva», aunque preferiríamos llamarla definición propiamente dicha.

2) Un signo simple ha estado en uso desde hace tiempo. Creemos poder analizar lógicamente su sentido y obtenemos una expresión compleja, de la cual decimos que expresa el mismo sentido que la otra. Como componente de una expresión compleja sólo admitimos algo que por sí mismo tiene un sentido reconocido. El sentido de esta expresión compleja debe resultar de su composición. Que él se corresponda con el desde hace tiempo habitual uso del signo no es resultado de una arbitraria convención sino que sólo puede admitirse en cuanto se manifiesta en forma inmediata. También aquí se habla, con razón, de definición. Para diferenciarla del primer caso se podría llamar a ésta «definición analítica», pero es mejor evitar aquí la palabra «definición», porque lo que aquí se quería llamar definición puede ser comprendido como axioma. En este segundo caso no queda lugar para una convención arbitraria porque el signo simple ya tiene su sentido. Sólo a un signo que aún no tenga ningún sentido se le puede otorgar arbitrariamente uno. Por ello queremos mantener nuestra forma originaria de hablar y sólo llamar definición a la definición constructiva. Definición es, entonces, una convención arbitraria mediante la cual se da un sentido a un signo simple que antes no tenía ningún sentido. Este sentido debe ser expresado, naturalmente, mediante un signo complejo cuyo sentido se origina a partir de una composición.

Consideremos ahora la confusión con que nos encontramos en un análisis lógico cuando es dudoso si ese análisis es correcto.

Admitamos que *A* es un signo simple (expresión) usado desde hace mucho tiempo, cuyo sentido hemos intentado analizar lógicamente construyendo una expresión compleja como representación de ese análisis. Como no estamos seguros de si se ha logrado el análisis no nos arriesgamos a caracterizar la expresión compleja como sustituible por un signo simple *A*. Si queremos lograr una definición apropiada no debemos elegir el signo *A*, que ya tiene un sentido, tenemos que elegir un nuevo signo, por ejemplo, *B*, al que, entonces, sólo a través de la definición damos el sentido de una expresión compleja. La pregunta es, pues, si *A* y *B* tienen el mismo sentido, pero podemos evitar la respuesta a esta pregunta construyendo nuevamente desde el principio el sistema, sin usar para ello el

signo *A*, sino sólo *B*. Hemos introducido arbitrariamente el signo *B* para aquella expresión compleja, con lo que le hemos dado un sentido. Esto es una definición en sentido propio, es decir, una definición constructiva.

Así pues, si podemos construir el sistema de la matemática sin necesidad del signo *A*, nos podemos quedar tranquilos con ello y no necesitamos responder a la pregunta por el sentido con que antes había sido usado este signo. De este modo se evitan las objeciones. Pero puede ser recomendable, por razones de utilidad, usar el signo *A* en lugar del signo *B*. Pero entonces debemos tratar como completamente nuevo al signo introducido que antes de la definición no tenía ningún sentido. Por eso debemos aclarar que el sentido en el cual se había usado este signo antes de la nueva construcción del sistema ya no nos interesa, y que, en cambio, el sentido de este signo ha de originarse simplemente a partir de la definición constructiva. Nada de lo sucedido en la matemática antes de la nueva construcción del sistema necesita entrar en consideración lógica para esta nueva construcción. Todo tiene que hacerse de nuevo partiendo del principio. También lo que hayamos efectuado en la actividad analítica debe verse sólo como preparación, que no aparece en la nueva construcción del sistema mismo.

Quizá persista aún cierta oscuridad. ¿Cómo es posible —puede preguntarse— que sea dudoso si un signo simple tiene el mismo sentido que una expresión compleja, cuando no sólo es conocido el sentido de dicho signo simple, sino que también es posible conocer, por su composición, el de la expresión compleja? En efecto, si el sentido de cada signo simple es captado en forma verdaderamente clara, no puede entonces dudarse si el sentido de esta expresión se corresponde con él. Si sigue siendo dudoso, aun cuando el sentido de esa expresión pueda ser claramente reconocido a partir de su composición, entonces ello se deberá a que el sentido de aquel signo simple no es captado claramente, sino que aparece como a través de una niebla, con contornos vagos. El resultado del análisis lógico será, precisamente, que el sentido ha sido destacado con claridad. Este es un trabajo muy provechoso pero no pertenece a la construcción del sistema mismo, antes bien lo debe preceder. Al comenzar la construcción ya deben estar a nuestra disposición los materiales bien preparados; dicho de otro modo: las palabras, signos, expresiones que se usen deben tener un sentido claro hasta tanto no se les dé un sentido en el sistema mismo mediante la definición constructiva.

Según esto permanecemos en nuestra concepción del comienzo, según la cual *una definición es una convención arbitraria* por la cual se introduce un nuevo signo para una expresión compleja cuyo sentido es conocido a partir de su composición. Este signo, que hasta ahora no tenía ningún sentido, recibe con la definición el sentido de aquella expresión compleja.

Si observamos ahora los escritos sobre matemática, encontraremos que muchas de las definiciones que aparecen y son señaladas como tales no lo son propiamente. Esas definiciones son comparables a los adornos en los edificios, que parecen estar sosteniendo algo mientras que en realidad podrían ser quitados sin que la estabilidad del edificio sufriera el menor daño. A tales definiciones se las reconoce en que ellas no se usan, en que nunca se recurre a ellas en una prueba. Pero si una palabra o signo *introducida* por una definición es usada en una tesis, se la puede introducir solamente por medio de una aplicación de la definición, o de la identidad que inmediatamente se sigue de ella. Si no aparece una aplicación tal, entonces debió incurrirse en alguna falla. Claro que la aplicación puede haber sido hecha en forma tácita. Por eso es tan importante para la clara inteligencia de la cuestión, que en cada conclusión que se produce en una prueba se puedan reconocer las premisas y la ley de deducción que intervienen en la conclusión. Mientras las pruebas sean realizadas de ese modo, no se podrá reconocer con seguridad qué es lo que se ha empleado en la prueba, en qué se apoya ella realmente. Y así no se podrá saber tampoco si una definición es nada más que una definición de adorno, que sólo ayuda como argumento y sólo es colocada porque se hizo corriente, o si ella tiene una profunda justificación. Por lo tanto es importantísimo efectuar las pruebas tal como lo hemos postulado.

Otra clase de definiciones no permitidas se puede caracterizar con una ecuación algebraica. Admitamos que tres incógnitas x, y, z aparecen en una igualdad. Entonces ellas pueden ser determinadas por medio de esa igualdad, pero en rigor sólo serán determinadas cuando sólo una solución sea posible. De manera semejante, palabras como «punto», «recta», «plano» se encuentran en muchas proposiciones. Admitamos que estas palabras no tienen todavía un sentido. Propongamos que para cada una de estas palabras se encuentre un sentido tal que dichas proposiciones expresen pensamientos verdaderos. ¿Pero se da por este medio una determinación unívoca? En todo caso, no siempre. Y la mayoría de las veces quedará la duda de cuántas soluciones son posibles. Pero si se puede probar que sólo una solución es posible, entonces ésta debe ser especificada asignando a cada una de las palabras que deben ser aclaradas un sentido por separado mediante una definición constructiva. Pero aquel sistema de proposiciones en el que aparecen varias de las expresiones que deben ser aclaradas no puede ser considerado definición.

Un caso especial de esto es aquél en el que solamente un signo que aún no tiene ningún sentido entra en una o más proposiciones. Admitamos que los componentes habituales de la proposición son conocidos. La pregunta es entonces qué sentido debemos dar a los signos para que las proposiciones tengan sentido y de tal modo que los pensamientos expre-

sados sean verdaderos. El caso se puede comparar con aquel en que x se encuentra en una o más igualdades cuyos restantes componentes son conocidos; la tarea es entonces: ¿qué significado debemos dar a x para que las igualdades expresen pensamientos verdaderos? Cuando se den muchas igualdades esta tarea será insoluble en la mayoría de los casos. Evidentemente, por este medio no se determinaría en general ningún número, y algo parecido sucede también en aquel caso. Por el hecho de que se use un signo en una o más proposiciones cuyos restantes componentes son conocidos, no se da aún a este signo un sentido. En el álgebra se da la ventaja de poder decir algo sobre el hecho de que un caso sea o no solucionable y sobre la cantidad de posibles soluciones, esto no sucede en los demás casos. Pero no es admisible que un signo tenga más de un significado. Para un sistema de signos que quiera servir para el uso científico la más importante exigencia es la univocidad. Se debe saber, pues, qué se está enunciando y acerca de qué, qué pensamiento se expresa.

También ha habido, por cierto, personas que presumían de lógicos y que opinaban que las *palabras-conceptos* (nomina appellativa) se diferenciaban de los nombres propios por tener muchos significados. La palabra «hombre», por ejemplo, significaría de la misma manera Platón, que Aristóteles, que Carlomagno. La palabra número designaría el 1 de la misma manera que el 2, etc. Nada más falso. Por cierto puedo designar con las palabras «este hombre» en algunos casos a éste, en otros a aquél. Pero en cada caso particular quiero designar con ellas sólo a uno en particular. Las proposiciones de nuestro lenguaje cotidiano dejan mucho librado a la conjetura, y la conjetura concreta será posible mediante las circunstancias acompañantes. La proposición que enuncio no siempre contiene todo lo necesario, muchas veces debe ser completada en función de lo que me rodea, con los movimientos de mis manos, con mi mirada. Pero el uso científico de una determinada lengua no debe dejar nada a la conjetura. Una palabra-concepto unida al pronombre demostrativo o al artículo determinante tiene así, a menudo, el valor lógico de un nombre propio, cuando ayuda a señalar un objeto individual determinado. Pero como nombre propio no hay que aprehender sólo la palabra-concepto sino el todo formado por ésta, más el pronombre demostrativo, más las circunstancias acompañantes. Tendremos palabras conceptos propiamente dichas, allí donde éstas se encuentren sin artículo determinante o sin pronombre demostrativo, o bien sin artículo o con el artículo indeterminante, o bien, unidas a «todos», «ninguno», «alguno». No se debe pensar que yo quiero decir algo de un jefe de tribu del interior de Africa, para mí completamente desconocido, cuando digo «todos los hombres son mortales». No digo algo ni de éste ni de aquél, sino subordino el concepto «hombre» al concepto «mortal». En la proposición «Catón es mortal» tengo una

subsunción, en la proposición «todos los hombres son mortales» tengo una *subordinación.* Aquí se habla de un concepto, no de una cosa particular. Tampoco se debe pensar que en la proposición «todos los hombres son mortales» esté contenida según su sentido la proposición «Catón es mortal», de tal modo que, cuando expreso aquélla, expresase al mismo tiempo el contenido del pensamiento de ésta. El asunto es más bien así: con la proposición «todos los hombres son mortales» digo: «si algo es un hombre, ese algo es mortal». Con una deducción de lo general o lo particular obtengo la proposición «si Catón es un hombre, entonces Catón es mortal». Para ello necesito aún una premisa, esto es «Catón es un hombre». De ambas premisas deduzco «Catón es mortal».

Puesto que, según lo dicho, se requieren deducciones y una segunda premisa, entonces en la proposición «todos los hombres son mortales» no se expresa el pensamiento de que Catón es mortal, y con ello es «hombre» no una palabra que tiene muchos significados y entre tantos también el que designamos con el nombre propio «Platón», sino una palabra-concepto que sirve justamente para la designación de un concepto. Y un concepto es completamente diferente de una cosa individual. Si digo «Platón es un hombre» no añado un nuevo nombre a Platón, esto es, el nombre «hombre», sino que digo que Platón cae bajo el *concepto hombre.* Del mismo modo son dos cosas completamente diferentes si defino $2+1=3$ y si digo «$2+1$ es un número primo». En el primer caso doy al signo 3, que aún está vacío, un sentido y un significado, al decir que significa lo mismo que la combinación de signos «$2+1$». En el segundo caso subsumo el significado de «$2+1$» bajo el concepto de número primo. Con esto no le doy un nuevo nombre. Así pues, por el hecho de que yo subsuma distintos objetos bajo un mismo concepto, la palabra-concepto no adquiere muchos significados. De modo que las palabras «número primo» en las proposiciones

«2 es un número primo»,
«3 es un número primo»,
«5 es un número primo»,

no adquieren muchos significados por el hecho de que 2, 3 y 5 sean números diferentes, pues «número primo» no es un nombre que se les dé a estos números.

El *concepto* es, según su esencia, predicativo. Si un nombre propio vacío se halla en una proposición cuyas restantes partes son conocidas, ésta adquirirá sentido cuando le demos un sentido a dicho nombre propio; pero mientras el nombre propio continúe estando vacío, tendremos en la proposición un posible enunciado, pero ningún objeto del cual se diga algo. Así en la proposición «x es un número primo» tenemos, en efecto, un posible enunciado; pero mientras a x no se le dé un significado,

nos faltará el objeto del cual se enuncia. Esto lo podemos expresar también diciendo que tenemos un concepto pero todavía ningún objeto que esté subsumido en él. Tomemos otra proposición: «*x* multiplicado por 2 es un número divisible por 4», también aquí tenemos un concepto. Podemos tomar estos dos conceptos como criterio para un nuevo concepto, considerando como un todo las proposiciones «*x* es un número primo» y «*x* multiplicado por 2 es un número divisible por 4». Bajo este concepto cae solamente un objeto, el número 2; pero un concepto bajo el cual cae sólo un objeto sigue siendo siempre un concepto, y la expresión de ese concepto no se vuelve por ello un nombre propio.

Detengámonos en esto: Las proposiciones que contienen un signo vacío y cuyos restantes componentes son conocidos no pueden ser considerados como definiciones, pero pueden servir para la aclaración cuando dejan conjeturar qué se ha querido expresar con aquel signo o palabra.

He leído que las palabras-definición son objetadas y que como tales son propuestas las que propiamente no deberían aparecer más. Con ello se ha aludido a una definición dada por mí; pero no se dijo qué es una palabra-definición. Ya se sabe que en toda definición se usan signos y palabras. Quizá una palabra-definición deba ser tal que contenga una palabra en la expresión aclarante que sólo sea una palabra, sin tener un sentido. Por cierto que esto no puede darse, y, en todo caso, el hecho de que el lector no una ningún sentido a una palabra no significa todavía que el autor de la definición no haya unido ningún sentido a esa palabra. La exigencia de un sentido es enteramente justa y tanto más cuando muchos matemáticos parecen sólo probar proposiciones, sin por ello ocuparse de si estas proposiciones tienen también un sentido o no. El poco valor que a menudo se da al sentido y a las definiciones se advierte en que los matemáticos dan explicaciones divergentes unas de otras sobre lo que es un *número*. (Aquí nos referimos al número entero positivo). Weierstrass dice: «Número es una serie de cosas de la misma clase». Otro dice que ciertas representaciones artificialmente producidas por la escritura, como 2, 3, serían números. Un tercero opina: cuando oigo que el reloj da las tres, no veo nada en ello que sea tres; no puede, por lo tanto, ser nada visible. Si veo tres rayas, no oigo nada en ellas que sea tres; luego, tampoco puede ser nada audible. Un axioma no es algo visible; por lo tanto, cuando se habla de tres axiomas, tampoco allí el tres puede ser algo visible. El número no puede ser absolutamente nada que sea perceptible por medio de los sentidos.

Es evidente que cada uno de estos tres matemáticos asocia un sentido diferente con la palabra «número». Las aritméticas de ellos deben, pues, ser completamente diferentes unas de otras. Una proposición del primero debe tener un sentido enteramente diferente de una proposición textual-

mente igual del otro. Esto se asemejaría al caso de los botánicos que no tuvieran el mismo criterio en lo que debieran entender por planta, de modo que un botánico entendiera por ello una formación orgánica desarrollada, otro una cosa artificial compleja hecha por la mano del hombre, un tercero algo que no fuera perceptible con los sentidos. Esto no daría, por cierto, una botánica unitaria.

¿Pero por qué no se podría convenir que el número sea una serie de cosas de la misma clase? Contra eso surgen algunas objeciones. Así pues, se puede encontrar que el sentido de la palabra «serie» no ha sido convenido de manera suficientemente segura. ¿Hay que pensar en este momento en un ordenamiento espacial o también en uno temporal, o quizá en uno espacio-temporal? Por otra parte, no está claro qué hay que entender por «de la misma clase». ¿Son por ejemplo los tonos de una escala ya por ello tonos de una misma clase, o solamente lo son cuando tienen la misma altura? Pero admitamos por una vez que se hubiesen dado estas aclaraciones, de modo que desapareciera la inseguridad. Un tren es una serie de objetos de la misma clase que se mueven con ruedas sobre rieles. Se puede suponer, quizá, que la locomotora es un objeto de otra clase. No obstante, esto no hace ninguna diferencia esencial. Y así es como un número viene de Berlín a toda velocidad. Admitamos que sea construida la ciencia de estos números. Esta será, sin duda, completamente diferente de la ciencia en la cual se llama números a determinadas construcciones que son trazadas sobre una superficie con algún instrumento para escribir. Aun cuando en ambas el texto sea el mismo, el pensamiento expresado tiene que ser totalmente diferente. Es entonces sorprendente que las proposiciones de estas ciencias fundamentalmente diferentes, a las que cada uno llamará aritmética, coincidan textualmente en todo. Y aún es más sorprendente que los investigadores de estas materias no sean conscientes de que sus ciencias son fundamentalmente diferentes. Todos creen hacer aritmética y, por cierto, la misma aritmética, la misma teoría de los números, aunque lo que éste llama número no tenga ningún parecido con lo que aquél llama número.

¿Cómo es posible esto? Casi se debería pensar que los matemáticos toman lo textual , la forma de la expresión, por lo esencial, y el pensamiento expresado por algo enteramente inesencial. Quizá se piensa: «El contenido del pensamiento de las proposiciones no les preocupa especialmente a los matemáticos; eso es sin duda cosa de filósofos, y todo lo filosófico es de por sí completamente impreciso, inseguro y, en el fondo, no científico. Un matemático que se precie de su nombre de científico no se ocupa de ello. Ciertamente se le puede escapar al mejor, una vez, en una hora de debilidad, una definición o algo que se le parezca; pero a ello no hay que adjudicarle ninguna importancia. Es como quien estornuda. Lo único esencial es, sin duda, que todos coincidan textualmente y en las fórmulas. Un

matemático que no esté filosóficamente enfermo se contentará con esto.»

¿Pero es ciencia la que prueba proposiciones sin saber lo que prueba? ¿Es realmente cierto que los matemáticos coinciden textualmente? ¿No se redactan escritos matemáticos en distintas lenguas, y no se los traduce de una lengua a otra? En esto se ha ido perdiendo, sin duda, la textualidad. Sin embargo, debe de haber algo allí que no se pierde. Y qué puede ser eso si no el sentido? Tan secundario no puede ser el pensamiento, el sentido de una proposición. ¿Y ni siquiera alienta una sospecha en lo más profundo de nosotros de que el contenido del pensamiento es propiamente, de por sí, lo principal, lo que importa? ¿Pero cómo es posible que se lo trate como a algo secundario? ¡Cómo se puede presumir que dos ciencias totalmente diferentes tengan el mismo contenido! ¿Sólo porque ambas son llamadas aritmética? ¿Sólo porque en ambas se trata de números, aunque lo que se nombra con este número sea completamente diferente de lo que se nombra con aquél? ¿O no será que se trata, efectivamente, de la misma ciencia, que, en el fondo, este científico une a la palabra número el mismo sentido que aquél, y simplemente no logra aprehender de un modo correcto dicho sentido? Quizá el sentido se les presenta de un modo tan nebuloso y vago que cuando intentan aprehenderlo no aciertan exactamente con él. Este lo aprehende, digamos, del lado derecho, aquél del lado izquierdo. Y así no aprehenden la misma cosa, aunque realmente lo desean. ¡Qué espesa debe ser la niebla para que esto sea posible! Pero esto debe hacerse notorio en la demostración. Sí, así debería ocurrir si la demostración fuera llevada a cabo con estricta lógica en una continuidad de deducciones sin lugares vacíos. Pero allí debe estar justamente *la falla*. Si nunca se hace uso de una definición es como si ésta no estuviera. Puede ocurrir que ella esté errando al blanco al que realmente se quiere acertar y que eso no se note. Otro matemático yerra, quizá, el tiro y da en otro lugar, pero como él no hace ningún uso de la definición, es como si ella no estuviera presente. Y así se comprende cómo las definiciones, que parecen tener que luchar hasta el fin de sus fuerzas, reposan unas junto a otras en paz como las criaturas en el Paraíso. Es muy posible que así sea.

Seguramente existe gran interés por saber cómo se hará la *multiplicación* de los números de Weierstrass. Junto a mi ventana se encuentra una biblioteca en cuyo estante hay una serie de cosas iguales, un número. Hoy por la tarde, alrededor de las 5 y 15, llega un tren rápido de Berlín a Saal, tenemos así nuevamente un número. Según una opinión muy extendida, de la multiplicación de un número por otro número se obtiene también un número. Por eso, de la multiplicación de aquella fila de libros con ese tren rápido se debería obtener nuevamente una serie de cosas de la misma clase. ¿Cómo haríamos pues esto? En una publicación que con-

tiene una clase de Weierstrass leo: «De acuerdo con la definición, la cantidad numérica se origina mediante la colocación repetida de la misma clase de elementos.» Parecería que sí, que, efectivamente, se haría una aplicación de la definición. ¿Y qué dice la definición? «Podemos imaginarnos una serie de cosas de la misma clase, si por cosas de la misma clase entendemos aquellas que coinciden respecto de un complejo de características determinadas. Una serie tal es lo que entendemos bajo el concepto de cantidad numérica.»

Aquí se dice cantidad numérica en lugar de número, pero eso no tiene mayor importancia. Ante todo, hay aquí una afirmación: «Nos podemos imaginar una serie de cosas de la misma clase.» Esto es una verdad psicológica que aquí propiamente no nos importa. ¿Pero entonces se sigue de esta definición que la cantidad numérica se origina de la colocación repetida de los mismos elementos? Aquel tren rápido es, sin duda, según la definición una cantidad numérica, ya que es una serie de cosas que coinciden respecto de un complejo de características. ¿Pero entonces un tren se origina con la colocación repetida de los vagones? ¿Debe colocarse repetidamente uno y el mismo vagón? ¿Cómo hago esto? ¿O debo colocar un vagón detrás del otro? En ese caso yo expresaría esto mejor así: un tren se origina cuando se coloca un vagón tras el otro. No creo que los empleados del ferrocarril conozcan este origen de un tren. Por eso yo desearía dudar de que una cantidad numérica se origine mediante la colocación repetida de cosas de la misma clase. En rigor, sobre la manera como ella se origina nada nos dice la definición.

En la publicación de que hablábamos dice más adelante: «El concepto de «cantidad» se puede considerar también como unidad y colocarlo repetidamente, por ejemplo, *b, b, b,...*» ¡Maravilloso! ¡Uno y el mismo concepto se puede colocar repetidamente! *b* parece ser aquí el signo del concepto cantidad. ¿Entonces yo coloco repetidamente este concepto cantidad con sólo escribir su signo repetidamente? Aquí parece haberse deslizado un error. A mí, al menos, me parece que no es el concepto de cantidad lo que debe ser colocado repetidamente, sino una cantidad numérica aislada. Entonces habría que considerar a *b* como signo de esa cantidad numérica, por ejemplo la del tren rápido. ¿Pero qué tiene que ver el escribir repetidamente estos signos con la colocación repetida del tren rápido? ¿O la cantidad numérica será, tal vez, no el tren rápido, sino una representación que tengo de él? Con esto se trasladaría el asunto a lo psicológico y a lo subjetivo, sin haber aclarado nada con ello. La cantidad numérica sería una imagen mental, y con ello la Aritmética una parte de la Psicología. ¿Pero cómo llegamos por fin a la multiplicación? Weierstrass continúa: «Hay una cantidad que contiene a todas estas *b*.

Si *b* se encuentra *a* veces, entonces indicamos con $a \times b$ aquella suma que consta de *a* sumandos.»

Aquí puede uno protestar porque el signo «*b*» se ha vuelto de pronto una palabra-concepto. Al comienzo era, efectivamente, nombre propio de una cantidad numérica, por ejemplo, de un tren rápido; y ahora, de repente se habla de todas estas *b*. Tratemos de explicarlo con un ejemplo. Coloquemos repetidamente al presidente Wilson de los Estados Unidos; de esa manera obtenemos una serie de presidentes Wilson. El nombre propio originario se transforma así en un nombre apelativo, y cada uno de estos ejemplares particulares obtenidos mediante la repetición es un presidente Wilson. Con la colocación repetida del presidente Wilson hemos obtenido entonces una serie de presidentes Wilson, y en esta serie aparece el presidente Wilson (ahora tenemos nuevamente un nombre propio, como lo muestra el artículo determinante), mejor dicho, en esta serie de presidentes Wilson aparece muchas veces el presidente Wilson.

Del mismo modo debemos considerar nuestro problema del tren. Designamos con *b* al tren rápido de Berlín que llega hoy por la tarde, alrededor de las 5 y 15. Esta *b* es una cantidad numérica. Colocamos esta cantidad numérica repetidamente. Así obtenemos una serie de trenes rápidos *b*. Hay entonces una cantidad numérica que contiene a todos estos trenes rápidos *b*. ¿Es así? Esta será también, con todo derecho, un nuevo tren ¿pero dónde para? Y el tren rápido *b* aparece entonces contenido muchas veces en este nuevo tren. Si aparece *a* veces, entonces indicamos con $a \times b$ la suma que consta de *a* sumandos *b*. No hemos hablado aún de esta suma, probablemente es la cantidad numérica que contiene a todos estos trenes obtenidos por colocación repetida; y esta cantidad numérica será también ella misma, posiblemente, un tren. Pero sabemos qué es $a \times b$. De *a* sabemos que es también una cantidad numérica; y nos gustaría saber cómo multiplicar el tren rápido por la fila superior de los libros de mi biblioteca situada junto a la ventana. Llamemos, pues, *a* a esa serie de libros. ¿Pero entonces qué se entiende por *a* veces? ¡Qué difícil y endiablado asunto es el de esta multiplicación! Sin embargo, según lo afirma el trabajo citado, obtenemos la misma cantidad, tanto con colocar *a* veces *b* como colocando *b* veces *a*. Tenemos así la elección. ¿Será mejor colocar la serie de libros *b* veces? Parece ser igualmente difícil. Y la cantidad numérica que indicamos con $a \times b$, ¿es propiamente de libros o de trenes? ¡Quién hubiera imaginado que multiplicar era tan difícil! ¡Y esto se hace hacer a niños de 9 años! ¡Piénsese en la dificultad de colocar repetidamente un tren rápido! En el fondo es impresionante con qué habilidad —la rapidez no es ninguna brujería— se consigue hacer desaparecer las cantidades numéricas y en lugar de ellas se saca a la luz lo que se llama número.

Y hay aún otra manera de introducir subrepticiamente el número. En efecto, el § 2 reza: «Pero puesto que en esto no se trata del orden de sucesión, sino sólo de la cantidad de los elementos, tenemos que

$$a+b=b+a».$$

Si la cantidad numérica fuera verdaderamente una serie de cosas de la misma clase, en ese caso importaría el orden de sucesión, pues si cambiamos el orden de sucesión cambiamos la serie. ¿Y lo que aquí se llama cantidad de los elementos no es propiamente lo que se llama número de elementos? Entonces no interesa la serie de la misma clase de cosas, sino el número; de lo cual procede la diferencia entre serie de cosas de la misma clase y número.

Así como aquí se introduce de contrabando el número propiamente dicho como cantidad, así también en otros lugares se lo introduce como valor. Que en la igualdad

$$a+b=c$$

a, b y *c* son cantidades numéricas ya lo hemos visto. Y sin embargo se dice: «Si se dan las igualdades

$$a+b=c$$
$$a\times b=c,$$

entonces, dados los valores de *a* y *b,* se podrá hallar mediante suma y multiplicación el valor de *c.*» Así se diferencia el valor de una cantidad numérica, de la cantidad numérica misma. Y este valor no ha de ser, por supuesto, otra cosa que un número. ¿Se comprobará realmente un valor mediante la adición, como dice Weierstrass? Supongamos que tenemos un tren *a* y un tren *b.* Desenganchamos los vagones de *b* y los unimos a *a.* obtenemos así un tren *c,* y Weierstrass dirá que surge de la adición de *b* a *a.* Aquí no ha sucedido otra cosa que el haberse constituido una nueva serie *c* a partir de la serie *a* y de la serie *b,* pero de la comprobación del valor de *c* no hay la menor señal. No es que se haya comprobado el valor de *c,* sino que *c* ha sido constituido. Vemos así, por todas partes, una contradicción entre la definición dada por Weierstrass y lo que él dice más adelante. Lo que Weierstrass llama aquí valor no puede ser otra cosa que lo que, de otro modo, se llama número.

Más adelante dice, en la citada clase: «Una cantidad numérica está determinada cuando se dice qué elementos contiene y con qué frecuencia aparecen.»

Así pues, en el caso de un tren habrá que considerar como elementos

los vagones. Por lo tanto, un tren estará determinado cuando se diga qué vagones tiene y con qué frecuencia están éstos contenidos en él. Uno de mis profesores de la Universidad contó una vez de cierto inventor de un movimiento perpetuo que había exclamado: «Ya lo tengo; sólo me falta un ganchito que haga siempre así», y al decir esto hacía con el dedo índice un movimiento ilustrativo. Este «con qué frecuencia» me recuerda a aquel ganchito «que siempre hace así».¿No estará precisamente en eso la dificultad? Si tuviéramos aquel ganchito tendríamos el movimiento perpetuo, y si pudiéramos aclarar las palabras «con qué frecuencia» podríamos también definir «número».

Pero aquí he pasado algo por alto. Antes se ha dicho que el concepto de cantidad numérica debe ser ampliado. «Con este fin se habrán de formar de aquí en adelante cantidades numéricas a partir de diferentes unidades, mientras que hasta aquí las cantidades numéricas introducidas en el cálculo procedían todas de *una* unidad.»

¿Realmente? Antes se había dicho: «A cada elemento aislado de los elementos de la serie que se repiten se le llama la unidad de la cantidad numérica.»

¿La unidad? «Cada elemento aislado es una unidad», esto suele decirse; pero que «todo elemento es la unidad», eso es absurdo. Si la palabra «unidad» ha de equivaler a «elemento», entonces tendremos «unidades» cada vez que tengamos «elementos», pero no *la* unidad. Se puede, sí, subsumir varias cosas bajo un concepto, lo que, por ejemplo, se hace cuando a cada una de esas cosas se la llama una unidad; pero no es admisible denominar cada una de estas cosas con el mismo nombre propio. Y «la unidad» debe ser considerada nombre propio puesto que esta expresión, por su forma lingüística, está destinada a designar un único objeto determinado. Si se llama «la unidad» a cada uno de muchos objetos, se está cometiendo un error. Así es como surge una simple diferencia de matiz entre singular y plural. La cantidad numérica consta de varios elementos pero sólo de una unidad, porque cada elemento es la unidad. ¿Cómo se entiende esto? Veamos: tomamos un vagón, digamos el vagón de carga número 1.061, perteneciente al circuito de Erfurt. Lo colocamos repetidamente y formamos así un tren de carga. Este tren de carga consta de varios elementos, o sea vagones, pero sólo de una unidad, pues cada uno de esos vagones de carga es la unidad, es decir el vagón de carga número 1.061 elegido al principio por nosotros. Este vagón se repite. Yo no he visto aún un tren de carga en el que uno y el mismo vagón se repita, pero esto sí parece ser posible para Weierstrass. Es posible que una cantidad numérica o serie de cosas de la misma clase conste de varios elementos, pero sólo de una unidad.

Volvamos ahora a la proposición: «Una cantidad numérica está de-

terminada cuando se dice cuántos lementos contiene y con qué frecuencia aparecen.» Hasta aquí nos hemos estado esforzando enormemente por diferenciar entre elemento y unidad; ahora todo vuelve a hacerse confuso. Un observador ingenuo dirá: «En el caso del tren lo que importa es el orden de sucesión.» Totalmente falso. Sólo tenemos un único vagón que aparece repitidamente, así que ni siquiera cabe hablar de ordenamiento. Un ordenamiento se da sólo en cosas diversas, y no en un elemento único que aparece repetidamente. Pero Weierstrass decía, sin embargo: «Se habrán de formar de aquí en adelante cantidades numéricas a partir de diferentes unidades.» Allí sí que debe existir un ordenamiento. Y así caemos, cada vez más, en la espesura impenetrable.

Weierstrass siempre ha errado al blanco al cual apuntaba, y así se vio obligado a introducir el número propiamente dicho mediante rodeos. En su propia exposición incurre siempre en contradicciones. Si *a,* según su definición es una cantidad numérica, entonces *a*-veces no tiene ningún sentido. El número es introducido bajo el disfraz de cantidad, o de valor, o mediante el giro «con qué frecuencia», y al hacerlo se llega a una simple diferencia de matiz entre singular y plural, y por lo tanto también entre nombre propio y palabra-concepto. Si a alguien que nunca ha meditado sobre estas cuestiones se lo despierta del sueño con la pregunta: «¿Qué es número?, probablemente producirá una respuesta que no se diferenciará mayormente de la de Weierstrass. Y para llegar a ésta si debió de meditarse sobre el tema.

¿Cómo es posible, se pregunta uno, que un matemático tan excelente haya podido fallar en este asunto? Si le hubiera dedicado un momento de reflexión habría llegado a un mayor grado de claridad. Pero él no reflexionó nada acerca de este problema. ¿Y por qué? Evidentemente creía que no era necesaria una reflexión. Le faltó el primer requisito: el reconocer que no se sabe. No vio mayores dificultades, todo le pareció claro y no se dio cuenta de que estaba contribuyendo a su propia confusión. Le faltó el ideal del sistema matemático. En su trabajo no encontramos ninguna prueba, no se formulan axiomas, sino sólo afirmaciones que se contradicen unas a otras; y donde parece deducirse algo de su definición, es una falsa deducción. Tan pronto como hubiese hecho el intento de construir un sistema desde abajo, habría él notado la inutilidad de su definición. Tenía una idea de lo que es número, pero una idea muy confusa; y a partir de ella corregía y agregaba siempre lo que, en rigor, debió seguirse de su definición. Y así es como afirma que el ordenamiento no tiene nada que ver cuando, por el contrario, el ordenamiento es esencial para una serie. No se dio cuenta de que aquello que él afirmaba no se seguía de su definición, sino de su idea de lo que es número.

A esto se agrega lo siguiente. En la escuela es a veces necesario dejar

a un lado el rigor científico porque los alumnos no tienen la madurez intelectual ni la necesidad que podrían ser satisfechas por dicho rigor. Probablemente sería imposible tratar las relaciones irracionales en los años medios del bachillerato como lo hizo Euclides, quizá ni siquiera es posible en los últimos años. Por motivos didácticos se nivelan las alturas, se liman las asperezas lógicas y se redondean las aristas. Esto es hasta allí necesario, pero debe detenerse allí. El rigor de la operación de la prueba debe ser recuperado despertando primero la necesidad de ello y satisfaciéndola luego. Y sólo por ligereza ocurrirá que los profesores, en su afán de facilitar las cosas a los alumnos, se olvidan de esta segunda parte de la tarea. La matemática sólo puede desplegar al máximo su valor formativo cuando persigue el más alto rigor lógico. Y si en un principio hay que renunciar en parte a él, luego debe ser recuperado. Es preferible dar menos material y promover con más intensidad la formación lógica. Pero este propósito nunca se logrará del todo; y más tarde se mirarán retrospectivamente los temas tratados en la escuela como algo ya superado, indigno de la preocupación de un erudito. Esas cosas serán vistas casi exclusivamente desde una perspectiva didáctica, aparecerán como algo totalmente secundario, sobre lo cual no vale la pena reflexionar.

¿Cómo es que alguien puede trabajar de modo fructífero en la ciencia —se preguntarán muchos— si uno de los conceptos básicos de esta ciencia le es oscuro? En efecto, el concepto de número entero positivo es fundamental para toda la parte aritmética de la matemática; una falta de claridad sobre esto se extenderá seguramente a toda la aritmética. Esto es, por cierto, una falta considerable, y uno debería pensar que ella impide todo progreso en esa ciencia. Ninguna proposición aritmética puede tener un sentido enteramente claro para alguien que no tiene una idea cabal de lo que es número. Este problema no es aritmético ni lógico: es psicológico. Los límites de nuestra conciencia no permiten que una construcción lógica muy compleja se nos aparezca igualmente clara en todas sus partes. ¿Quién de los que usan, por ejemplo, la palabra «integral» en una operación de prueba tiene presente en forma clara todo lo que pertenece al sentido de esta palabra? Y sin embargo, se pueden hacer deducciones correctas aunque siempre una parte del sentido de algo quede en la oscuridad. Weierstrass tiene una idea correcta de lo que es número y partiendo de esa idea corrige y agrega siempre aquello que en realidad debería seguirse de las definiciones que propone. Por ello se mueve en contradicciones y llega, sí, a pensamientos verdaderos pero que llegan sólo en forma desordenada a su conciencia. Sus proposiciones expresan pensamientos verdaderos, si se las entiende correctamente. Pero si se las quiere entender según su propia definición, se cae en la confusión.

Veamos todavía algunos detalles de la teoría de Weierstrass: (cit. § 2) «...y la define mediante la igualdad $c=a+b$». ¿Qué es lo que aquí se define? Porque ni el signo-más ni el signo-igual han aparecido hasta ahora. Una definición no puede tener la forma de una igualdad con varios elementos desconocidos. ¿Cómo hay que entender el signo-igual? Según el texto, podría pensarse que «=» y «+» no deben ser entendidos como signos especiales, de los cuales cada uno tendría un sentido propio, sino sólo que la totalidad querría decir que la serie c en la forma dada se habría originado de las series a y b. Esto, en sí mismo, sería perfectamente posible, sólo que no está de acuerdo con el uso habitual de los signos, ya que tanto «=» como «+» aparecen en otras relaciones. Y el mismo Weierstrass usa inmediatamente después la relación

$$«b+a=a+b»$$

y hace notar, además, que esto sería un ejemplo de la ley general de que dos cosas no idénticas pueden ser iguales según una determinada definición. Pero él no ha definido el signo «=» sino la palabra «igual» al referirse a las cantidades numéricas (cit. § 1).

De acuerdo con esto, la palabra «igual» no tiene el sentido de «lo mismo que». Si entendemos el signo «=» del mismo modo que la palabra «igual», entonces debemos esperar que lo que está a la izquierda de ese signo designe una serie de cosas de la misma clase, y lo mismo lo que está a la derecha. Pero de «$a+b$» no sabemos todavía qué es lo que designa. Cuando escribimos, como de costumbre, «$5=3+2$», no estamos designando una serie, una cantidad numérica, como dice Weierstrass, ni con «5» ni con «3+2», ¿pues cuál sería esa serie? ¿De qué miembros constaría? Es claro que las cantidades numéricas de Weierstrass, según su explicación, pueden ser iguales unas de otras sin coincidir en todos sus aspectos; por ejemplo, una puede constar de vagones, otra de libros. En consecuencia habría, para una cantidad numérica, no sólo una inmediatamente siguiente, sino muchas, quizá infinitas, que serían iguales entre sí pero diferentes unas de otras. Pero el uso habitual en la aritmética no está de acuerdo con esto. Lo que designamos con los signos numéricos no son las cantidades numéricas en el sentido de Weierstrass.

Ahora cabe preguntarse si en la Aritmética, de acuerdo con la manera de escribir y hablar existente, los números que son iguales entre sí pueden, efectivamente, diferenciarse unos de otros. La mayoría de los matemáticos tenderá a contestar que sí; pero lo que ellos declaran como su opinión no siempre coincide con lo que, en el plano más profundo, es realmente su opinión, aunque en ningún momento hayan querido decir cosas no ver-

daderas. Eso lo hemos visto en Weierstrass, en quien debimos suponer una idea de lo correcto, en contradicción con sus propias palabras.

Acerca del *signo-igual* la mayoría de los matemáticos no dice nada: más bien dan su sentido por conocido. Pero que para ellos mismos este sentido sea totalmente claro, no puede ser tenido por seguro.

¿Qué hacemos realmente cuando escribimos «3+2»? ¿Proponemos una tarea que debe ser realizada? Cuando escribimos 7 — 3», ¿queremos decir acaso: «búsquese un número que multiplicado por 3 dé 7? Podría parecer así si las relaciones entre signos se dieran aisladas de ese modo. Pero también escribimos «(3+2)+4». ¿Hay que agregar a la primera tarea por resolver el número 4? No, al número que resulte de la solución de esa tarea. Lo que está delante del signo «+» designa, según lo que es corriente, un número. Del mismo modo, también lo que está a la derecha del signo «+» designa un número.

En consecuencia, también en «4+(3+2)» debe «(3+2)» ser considerado como signo de un número, o sea, signo del número que también se designa con el signo «5». Y así tenemos en «3+2» y en «5» signos del mismo número. Y si escribimos «5=3+2», entonces coinciden los significados de los signos a la derecha y a la izquierda del signo-igual no sólo en esta o aquella característica, o en este o en aquel aspecto, sino totalmente y en cada aspecto. Lo designado a la izquierda es lo mismo que lo designado a la derecha.

¡Pero ambos signos son diferentes! ¡Se ve a simple vista que son distintos! Aquí nos topamos con una muy difundida enfermedad de los matemáticos, a la que yo llamaría «morbus mathematicorum recens», Su síntoma principal consiste en una incapacidad para distinguir el signo de lo designado. ¿Es pues imposible designar lo mismo con diferentes signos? Puede la diferencia de signos ser por sí misma motivo suficiente para aceptar la diferencia de lo designado? ¿A dónde iríamos a parar si admitiéramos que 2+3 es diferente de 5? A la pregunta: «qué número sigue, en la serie de los números enteros, inmediatamente después de 4?», se respondería: «muchísimos; algunos de ellos son 5, 1+4, 2+3, 3+2, $7-2$, 3^2-2^2).» No tendríamos una serie simple de los números enteros, sino un caos. Los números enteros inmediatamente siguientes a 4 seguirían inmediatamente no sólo a 4, sino también a 2, a 2×2. Estos números serían, además, todos iguales entre sí, y sin embargo, todos diferentes. Esto no es admisible. Por eso quedamos en que los signos «2+3», «3+2», «1+4», «5» designan el mismo número. No obstante, podría objetarse algo en contra de esto. ¿No es diferente el contenido de las proposiciones «5=5» y «5=2+3»? La primera es una consecuencia inmediata del principio de identidad, pero ¿lo es también la segunda? Podría decirse, si designáramos con el signo «2+3» lo mismo que con «5», entonces debería-

mos saberlo en forma inmediata y no necesitaríamos hacer previamente la cuenta. Esto es más fácil de ver en el caso de números mayores. No es inmediatamente evidente que 137+469=606, sino que este conocimiento sólo resulta de una cuenta. Y esta proposición dice mucho más que «606=606». La primera amplía nuestro conocimiento, la segunda no. Por lo tanto, el pensamiento contenido en ambas proposiciones debe ser diferente. ¿Es posible designar lo mismo con dos nombres o signos diferentes sin saber que es lo mismo lo que se ha designado? Sí, es posible y además ocurre. Por ejemplo, se ha observado un pequeño planeta y se le ha dado provisoriamente una designación. Después de nuevas observaciones resulta que el mismo planeta ya había sido observado antes y se le había dado un nombre. Es muy posible que el mismo astrónomo haya usado los dos nombres sin saber que ambos se refieren al mismo planeta. También puede ocurrir en la exploración de una región desconocida, que dos exploradores den dos nombres distintos a una montaña que han visto desde distintos lados, y que sólo más tarde, de la comparación de las cartas geográficas surja que ambos vieron la misma montaña y la denominaron de diferente manera. Debemos pues admitir que es posible denominar el mismo objeto con nombres diferentes, sin saber que es lo mismo.

Por otra parte no hay que desconocer que el pensamiento expresado en la proposición «5=2+3» es diferente del de la proposición «5=5». aunque la diferencia consista sólo en que «2+3» es reemplazado en la segunda proposición por «5», dos signos que designan el mismo número. Entonces los dos signos no son iguales, aunque designen el mismo número. Por lo tanto digo: los signos «5» y «2+3» designan lo mismo, pero no expresan el mismo *sentido*. Del mismo modo, «Copérnico» y «el fundador de la teoría heliocéntrica del sistema planetario» designan a la misma persona, pero tienen diferente sentido. En efecto: las proposiciones «Copérnico es Copérnico» y «Copérnico es el fundador de la teoría heliocéntrica del sistema planetario» no expresan el mismo pensamiento.

Las posibilidades del lenguaje son maravillosas. Mediante pocos sonidos y grupos de sonidos consigue expresar una enorme cantidad de pensamientos, aun aquellos que no han sido antes aprehendidos o expresados por ningún ser humano. ¿De dónde surge esta posibilidad? Del hecho de que los pensamientos están formados por trozos de pensamiento. Y estos trozos se corresponden con grupos de sonidos, con los que se construye la proposición que expresa el pensamiento, de modo que a la construcción de la proposición por medio de partes de proposición corresponde la construcción del pensamiento por medio de partes de pensamiento. Y a la parte del pensamiento se la puede llamar el sentido de la parte de proposición correspondiente, de igual manera como el pensamiento será aprehendido como el sentido de la proposición.

Veamos la proposición «El Etna es más grande que el Vesubio». A las palabras «el Etna» les corresponderá una parte del pensamiento: el sentido de estas palabras. ¿Pero es el volcán mismo, con todas sus rocas y masas de lava, parte del pensamiento? Claro que no, pues el Etna se lo puede ver; en cambio, al pensamiento de que el Etna es más alto que el Vesubio no se lo puede ver. ¿Pero de qué se enuncia algo? Evidentemente del volcán Etna mismo. ¿Y de qué se enuncia algo en la proposición «Escila tiene seis cabezas»? Eso falta aquí, pues la palabra «Escila» no designa nada. No obstante, en la proposición se puede encontrar un pensamiento expresado y reconocer un sentido a la palabra «Escila». Pero ese pensamiento no pertenece al dominio de la verdad y la ciencia, sino al de la poesía o la leyenda. Prescindiendo de este caso, el nombre propio debe designar algo, y de aquello que él designa, de su significado, se enuncia algo en la proposición en que él aparece. Pero el nombre propio también tiene que tener un sentido, que entonces es parte del pensamiento de la proposición en que aparece el nombre propio. Vemos así la posibilidad de que dos signos designen lo mismo y, sin embargo, respecto del contenido del pensamiento de una proposición en la que ellos aparecen, no sean intercambiables porque tienen diferentes sentidos. Pero esto de que no sean intercambiables ha sido, quizá, muchas veces la causa de que no se haya reconocido que ellos designan el mismo número. Pero hemos visto que esa causa es nula, y quedamos en que el signo-igual en la aritmética debe ser entendido como signo de identidad.

Una confirmación de esto la podemos encontrar en el librito de Weierstrass. Allí se investiga de qué manera se puede ampliar el campo numérico para que la sustracción siempre pueda ser resuelta. Respecto de eso se dice: «Entonces también $(a - a)$ debe tener un significado, y efectivamente lo tiene: que se suma a un número cualquiera sin que éste cambie de valor.»

Aquí se diferencia el valor de la cantidad numérica de la cantidad numérica misma, y es este valor el que después de la adición de $(a - a)$ sigue siendo el mismo que antes de la adición. Pero ahora debemos suponer que lo que Weierstrass llama valor de una cantidad numérica es propiamente el número. Es decir, el número sigue siendo el mismo. Así llegamos a la concepción de que para Weierstrass las cantidades numéricas iguales tienen el mismo valor. De modo que al pasar de las cantidades numéricas de Weierstrass a sus valores, estamos pasando, al mismo tiempo, de la igualdad de Weierstrass a la identidad. Y si Weierstrass —como seguramente es el caso— con «valor de una cantidad numérica» se refiere a lo que corrientemente se llama número, también aquí, por los números, se llega a la identidad.

Según esto, la cuestión sería así: para Weierstrass se borra, por lo

pronto, la diferencia entre lo que él llama cantidad numérica y el número de la Aritmética. Sin embargo, él no puede menos que introducir este número propiamente dicho con el disfraz de valor de una cantidad numérica y con ello diferenciar entre cantidad numérica y valor, y además de eso resulta luego que las cantidades numéricas tienen el mismo valor si, según Weierstrass, son iguales entre sí. Pero visto ahora a mejor luz, en la aritmética el signo-igual no va entre cantidades numéricas en el sentido de Weierstrass, sino entre nombres de números propiamente dichos, a los que, por otra parte Weierstrass, de manera indirecta, llama valores de cantidades numéricas.

De este modo, entonces, la concepción del número como serie de cosas de la misma clase, como rebaño, montón, como totalidad que consta de partes iguales, se relaciona estrechamente con la opinión de que el signo-igual no serviría para designar la identidad. Pero luego, y puesto que es inevitable, apenas se llega por medio de un truco de prestidigitador al número propiamente dicho de la Aritmética, el signo-igual es transformado inmediatamente en un signo de identidad. De modo que no hay que asombrarse de que aquella concepción sufra constantes oscilaciones.

Algo similar encontramos en el caso del *signo-más*. Este apareció por primera vez cuando fue aclarada la suma. Según eso, hay que admitir que $a+b$ designa la cantidad numérica que se origina al agregar a las unidades de a las unidades de b. El signo-más aparece, entonces, entre signos de cantidades numéricas. Pero en el caso de la multiplicación se nos dice: «Si se designa con a las unidades de b, se obtiene

$$\overbrace{a+a+a+ \ \ldots \ +a}^{b \text{ veces}} \ \ldots»$$

Aquí el signo-más está entre signos de unidades, y por unidad hay que entender un miembro de una serie de cosas de la misma clase. De acuerdo con esto hay que admitir que Weierstrass concibe también una cosa aislada como serie de cosas de la misma clase, o sea como serie que sólo consta de un miembro. De este modo, también una lenteja será considerada, en el sentido de Weierstrass, como cantidad numérica. Tomemos ahora una lenteja y designémosla con «α». Tomemos otra y designémosla con «β». Pongamos ahora la lenteja β junto a la lenteja α y obtendremos una serie de cosas de la misma clase, que Weierstrass designará sin duda con «$\alpha+\beta$». Si tomamos otra lenteja más, la designamos con «γ» y la colocamos junto a la cantidad numérica consistente en las lentejas α y β, o sea $\alpha+\beta$, obtenemos así, mediante suma, una nueva cantidad numérica que, de acuerdo con Weierstrass, señalamos con «$(\alpha+\beta)+\gamma$». De modo que, según Weierstrass, podamos formar el nombre de una cantidad nu-

mérica a partir del nombre de sus elementos o unidades, por medio del signo-más. ¿Pero qué designaría entonces el signo «$\alpha+\alpha$»? Podemos, sí, colocar la lenteja β junto a la lenteja α y formar así una serie de cosas de la misma clase, ¿pero cómo haremos para que la lenteja α venga a quedar junto a sí misma? La lenteja α tendrá que conformarse con aparecer repetidamente.

Consideremos la serie de cosas de la misma clase formada por los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Esa serie podría ser designada, por ejemplo, así:

"♃+♄+♅+♆".

Llamemos b a esta cantidad numérica. Por consiguiente, ♃ es una unidad de b; igualmente lo es ♄; también es ♅ una unidad de b; y finalmente también lo es ♆.

Felizmente, ninguna de estas unidades aparece repetida. Ahora podríamos preguntarnos: «¿Se designa con "♃" las unidades de b y se forma así

'♃+♃+♃+♃'?»

¿Designa esto realmente lo mismo que

«♃+♄+♅+♆»?

Es inaceptable designar cosas diferentes con el mismo signo, pues la univocidad es la primera exigencia que debemos plantear al signo. Es evidente que el signo-más no es aplicable aquí, si se lo quiere usar aquí como es corriente en la Aritmética. Se escribe «1+1+1+1», pero en este caso el primer signo «uno» significa lo mismo que el segundo, que el tercero y que el cuarto. No tenemos aquí cosas diferentes que formen una serie, un grupo, un montón; tenemos solamente el número uno. De ahí se explica por qué el signo-más no puede corresponder a la palabra «y» del lenguaje. Si decimos «Schiller y Goethe son poetas», no estamos uniendo con «y» justamente los nombres propios, sino las proposiciones «Schiller es un poeta» y «Goethe es un poeta,», que están resumidas en una sola. Distinto es en la proposición «Siemens y Halske construyeron las primeras grandes líneas telegráficas». Aquí no se trata de dos proposiciones que estén resumidas en una sola, sino que con «Siemens y Halske» se designa un objeto compuesto del cual se enuncia algo, y la palabra «y» contribuye a formar el signo de ese objeto. Sólo este uso de «y» es comparable con el signo-más, pero esa comparación está indicando también que los casos

«Siemens y Halske», «la Tierra y la Luna» y «1+1» son totalmente diferentes.

En todo esto vemos una concepción matemáticamente inútil en pugna con la única concepción realmente útil.

La concepción del número como serie de cosas de la misma clase, como grupo, montón, etc., está en estrecha relación con la concepción del signo-igual, según la cual éste designa sólo una coincidencia parcial, y con la concepción del signo-más como equivalente de «y». Pero estas concepciones fracasan ante todo intento serio de fundar con ellas una Aritmética. Si se realiza el intento, se está obligado a introducir subrepticiamente algo que contradice dicha concepción. En esto tenemos ejemplos de cómo no deben ser las definiciones. Sólo si se deja de lado el intento de construir un sistema de la Aritmética por medio de estas definiciones, se puede ignorar su total inutilidad. Y de aquí extraemos el fundamento de que una definición debe conservarse en la construcción de un sistema científico. Nos aproximamos ahora a la *definición de los conceptos.* El caso más simple en el que se da un concepto es el de una proposición cuyo sujeto gramatical es un nombre propio. Podemos decir que con ello se subsume un *objeto* bajo un concepto: el objeto cuyo nombre propio es el sujeto gramatical. El resto, la parte predicativa de la proposición significa un *concepto.* Por eso digo: el concepto tiene carácter predicativo, necesita ser completado, así como la parte predicativa de la proposición exige siempre un sujeto lingüístico, y sin éste parece incompleta. Por su necesidad de ser completada no podemos tener la parte predicativa sola a un lado de la igualdad-definición, siempre debemos completar esa parte predicativa por medio de algo que tome el lugar del sujeto gramatical. Para ello tomamos, por ejemplo, la letra «*a*». Ahora tenemos, a la derecha y a la izquierda de la igualdad-definición, una expresión que contiene la letra «*a*»; y con ello queremos establecer que las dos partes de la igualdad deben tener siempre el mismo sentido, cualquiera sea el nombre propio significativo que sustituya a *a.* Nos valemos de esta letra para dar generalidad a lo que hemos establecido.

El caso más simple de definición de un concepto es aquel en que un concepto se une a otro para formar uno nuevo. De la siguiente manera: en principio podemos unir dos proposiciones por medio de «y» y concebir también esta proposición compleja, lo mismo que cada una de sus partes, como la expresión de un pensamiento, por el hecho de que la proposición compleja puede ser afirmada o negada como un todo. Si la afirmamos, afirmamos también cada una de sus partes; si la negamos, queda indeterminado si la primera o la segunda o ambas partes son falsas.

Veamos el caso: «8 es un número cúbico y 8 es positivo». En esta proposición compuesta se enuncia algo del número 8. El resto de la pro-

posición, fuera del signo del número 8, puede ser considerado signo de un concepto e introducir para él un nuevo signo por medio de una definición, de esta forma:

$$\left\{\begin{array}{c} a \text{ es un número cubico} \\ \text{y} \\ a \text{ es positivo} \end{array}\right\} = a \text{ es un número cúbico positivo.}$$

Aquí aparece dos veces la letra «*a*» a la izquierda. No hay nada contra ello, pero a la derecha, donde está la expresión aclarada, *a* no puede aparecer más que una vez. Si *a* apareciera en diferentes lugares, sería posible llenar esos lugares con diferentes nombres propios, y así se originaría una expresión que no estaría aclarada; la aparición de una expresión sin sentido debe ser evitada.

Aquí vemos un concepto (el número cúbico positivo) compuesto por conceptos parciales (número cúbico y positivo). A éstos los llamamos notas de aquel concepto complejo.

El caso en que un nombre propio aparece como sujeto gramatical de una proposición cuyo predicado designa un concepto es, lingüísticamente el más sencillo, pero no el único posible. Siempre que aparece un nombre propio en una proposición enunciativa, podemos considerar la parte restante de la proposición como signo de concepto. Un signo de concepto requiere siempre ser completado mediante un nombre propio o un signo que sustituya a un nombre propio, por ejemplo, una letra.

Como ejemplo puede servir la definición de *número primo*. Establecemos que

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si } a \text{ es múltiplo de un} \\ \text{número entero mayor que 1,} \\ \text{entonces } a \text{ es este número} \\ \qquad\qquad \text{y} \\ a \text{ es un número entero} \\ \qquad\qquad \text{y} \\ a \text{ es mayor que 1} \end{array}\right\} = a \text{ es un número primo.}$$

Aquí tenemos, a la izquierda la expresión aclarante, a la derecha la aclarada. Con ello estamos diciendo: cualquiera sea el nombre propio significativo que sustituya a *a,* la expresión de la derecha debe tener siempre el mismo sentido que la que está a la izquierda.

De un concepto debemos exigir la *limitación estricta.* Esto quiere decir: de todo objeto debe poder decirse, o bien que cae dentro de un concepto, o bien que no cae. Un tercer caso, como el de la indecisión o indeterminación, no debe presentarse.

De aquí resulta una exigencia al signo de concepto. Este, completado con un nombre propio, siempre debe dar por resultado una proposición. Y esa proposición ha de expresar siempre un pensamiento que es o verdadero o falso. De modo que, cuando se introduce un nuevo signo de concepto por medio de una definición, debe cumplirse con esta exigencia. Esto ocurre por sí sólo cuando la parte aclarante de la igualdad-definición consta de un signo de concepto correctamente construido que es completado con una letra que sustituye a un nombre propio y que da a la igualdad-definición la necesaria generalidad. Es claro que la definición no puede ser condicionada. Cuando se establece que la expresión aclarada debe tener el mismo sentido que la aclarante, esto no puede estar sujeto a ninguna condición; pues de lo contrario, no se establecería nada para el caso de que la condición no se cumpliera. La expresión aclarada no tendría entonces ningún sentido. Es decir, si sustituimos aquella letra por el nombre de un objeto que no cumple con la condición, obtenemos, en la parte aclarada de la igualdad-definición, no una proposición que expresa un pensamiento que es verdadero o falso, sino una combinación sin sentido de signos.

En general, las definiciones condicionadas deben, pues, ser descartadas o en todo caso, si se usara una de ellas, esto requeriría una justificación especial.

Pasemos ahora a las *definiciones de relaciones.* Cuando en una proposición aparecen dos nombres propios, se puede considerar a los otros elementos que aparecen en ella como signo de una relación, como, por ejemplo en

«3 es mayor que 2»,

donde los signos numéricos «3» y «2» deben ser vistos como nombres propios. En la definición de una relación necesitamos dos signos sindicativos que representen a los nombres de los objetos que están en relación. Cada una de estas letras puede aparecer sólo una vez en la parte aclarada, por la misma razón que hemos visto en el caso de la definición de conceptos. Tomemos como ejemplo la definición de la congruencia numérica.

$$\left\{\begin{array}{l}(a-b) \text{ es un múltiplo de } 7 \\ \text{y} \\ a \text{ es un número entero} \\ \text{y} \\ b \text{ es un número entero}\end{array}\right\} = a \text{ es congruente con } b, \text{ módulo } 7.$$

Las letras *a* y *b* sirven para dar generalidad a lo establecido. Con ello

decimos que, cualquiera sean los nombres propios significativos que sustituyan a «*a*» y «*b*», la expresión que está a la derecha tendrá el mismo sentido que la de la izquierda. Así obtenemos, sustituyendo «*a*» por «16» y «*b*» por «2»,

$$\left\{\begin{array}{c}(16-2)\text{ es un múltiplo de }7\\ \text{y}\\ 16\text{ es un número entero}\\ \text{y}\\ 2\text{ es un número entero}\end{array}\right\} = 16 \text{ es congruente con } 2, \text{ módulo } 7.$$

Mientras las letras, que indican de un modo indeterminado, no sean sustituidas por nombres propios, ni la parte de la izquierda ni la de la derecha tienen sentido. Pero es necesario que, en la parte izquierda, fuera de las letras todo sea conocido, de modo que la parte izquierda adquiera siempre un sentido cuando sustituyamos a «*a*» y «*b*» por nombres propios significativos. De ahí se sigue que el signo-menos no sólo debe ser aclarado en el caso de que se encuentre entre signos numéricos, pues de lo contrario una proposición como «$(a - b)$ es un múltiplo de 7» no siempre adquiriría sentido al ser sustituidos «*a*» y «*b*» por nombres propios significativos. En consecuencia, tampoco la proposición

«*a* es congruente con *b*, módulo 7»,

adquiriría siempre un sentido.

La unión de signos «$(16 - 2)$» es un nombre propio de un número. El signo «$(a - b)$» representa, por lo tanto, a un nombre propio. De él obtenemos un nombre propio, en tanto reemplacemos a «*a*» por un nombre propio e igualmente a «*b*». En la proposición

«$(16 - 2)$ es un múltiplo de 7»,

el signo «$(16 - 2)$» tiene, entonces, un significado: el número 14. El signo «$(16 - 2)$, tiene también un sentido, que es parte del sentido de la proposición; y ese sentido es lo que el signo «$(16 - 2)$» aporta a la expresión del pensamiento. Así podemos decir que el signo «$(a - b)$» adquiere sentido mediante la sustitución de las dos letras por un nombre propio significativo. En eso coincide el signo «$(a - b)$» con

«$(a - b)$ es un múltiplo de 7».

Al reemplazar aquí «*a*» por «16» y «*b*» por «2», obtenemos un sentido, el sentido de la proposición

«(16 — 2) es un múltiplo de 7»,

y este sentido es un pensamiento. También «(16 — 2)» tiene un sentido, pero éste no es un pensamiento, sino sólo una parte de un pensamiento. De todos modos, los signos complejos «(*a* — *b*)» y

«(*a* — *b*) es un múltiplo de 7»,

coinciden en que ambos reciben un sentido al ser remplazadas las letras por nombres propios significativos; y con ello el signo «(*a* — *b*)» recibe también un significado. Si sustituimos «*a*» por «16» y «*b*» por «2», dicho significado es el número 14. Se puede preguntar si también la proposición

«(16 — 2) es un múltiplo de 7»,

tiene un solo sentido, sino también un significado.

Comparemos con la proposición «El Etna es más alto que el Vesubio». A esta proposición unimos un sentido, un pensamiento, la comprendemos, podemos traducirla a otra lengua. En esta proposición tenemos el nombre propio «Etna», que aporta algo al sentido de toda la proposición, al pensamiento; ese aporte es una parte del pensamiento, es el sentido de la palabra «Etna». Pero no enunciamos nada de ese sentido, sino de una montaña, que no es parte del pensamiento. Un representante de la teoría del conocimiento idealista nos diría ahora: «Eso es un error. El Etna es tu representación». Todo el que pronuncia la proposición «El Etna es más alto que el Vesubio» la entiende en el sentido de que en ella se dice algo de un objeto que es enteramente independiente del hablante. El idealista diría que es un error que el nombre «Etna» designe algo. Entonces el hablante se perdería en la región de la leyenda y la poesía, mientras cree estar en el terreno de la verdad. Pero el idealista no tiene derecho a retorcer tanto el pensamiento, como si el hablante quisiera designar con el nombre «Etna» alguna de sus representaciones e informar algo acerca de ella. O bien el hablante designa con el nombre «Etna» lo que quiere designar, o bien no designa nada con ese nombre, que carece así de significado.

Es pues esencial, primero, que el nombre «Etna» tenga un *sentido,* de lo contrario tampoco la proposición tendría un sentido, no expresaría un pensamiento; y segundo, que el nombre «Etna» tenga un significado, pues de lo contrario nos perderíamos en la poesía. Claro que esto último sólo es esencial cuando nos movemos en el terreno de la ciencia. Para la

poesía da lo mismo si los seres humanos que aparecen en ella son o no, como suele decirse, personas históricas; dicho más exactamente: si los nombres propios de personas que aparecen en la poesía son significativos de personas.

Si sólo nos importara el sentido de la proposición «El Etna es más alto que el Vesubio», no tendríamos ningún motivo para exigir también un significado para el nombre propio «Etna», pues para que la proposición tenga un sentido, sólo hay que exigir al nombre «Etna» que tenga un sentido; el significado no aporta nada al pensamiento expresado. Pero si nos importa que el nombre propio «Etna» designe algo, también nos importará el significado de toda la proposición. Que el nombre «Etna» designe algo, sólo tendrá valor para nosotros si nos importa la verdad en el sentido de la ciencia. Nuestra proposición, pues, sólo tendrá sentido cuando el pensamiento expresado en ella sea verdadero o falso, y sólo entonces. El significado de una proposición debe ser algo que se mantenga cuando una de las partes de la proposición es sustituida por algo de igual significado. Volvemos ahora a la proposición «(16 — 2) es un múltiplo de 7».

El signo «16 — 2» es nombre propio de un número. «17 — 3» designa el mismo número, pero «17 — 3» no tiene el mismo sentido que «16 — 2». Del mismo modo el sentido de la proposición «(17 — 3) es un múltiplo de 7», es también diferente del sentido de la proposición «(16 — 2) es un múltiplo de 7», e igualmente diferente es el sentido de la proposición «16 es congruente con 2, módulo 7» del sentido de la proposición «17 es congruente con 3, módulo 7». Pero la proposición «(17 — 3) es un múltiplo de 7» debe tener el mismo significado que la proposición «(16 — 2) es un múltiplo de 7». Y a aquello que *no* cambia con la sustitución del signo «(16 — 2)» por el de igual significado «(17 — 3)», llamo *valor de verdad.* Las proposiciones son, o bien ambas verdaderas, o bien ambas falsas. En nuestro ejemplo son las dos verdaderas, pero es fácil dar otro ejemplo en el que las dos sean falsas: bastaría con tomar el número 8 en lugar del número 7.

Por eso decimos que dos proposiciones tienen *el mismo significado* si las dos son verdaderas o si las dos son falsas. En cambio tienen *significados diferentes* si una es verdadera y la otra falsa. Si una proposición es verdadera, digo que su significado es lo verdadero. Si una proposición es falsa, digo que su significado es lo falso. Si una proposición no es ni verdadera ni falsa, no tiene ningún significado. Puede, sí, tener un sentido; en ese caso digo: esa proposición pertenece al ámbito de la poesía.

Para simplificar he llamado verdadera o falsa a la proposición, cuando en realidad verdadero o falso es el pensamiento expresado en ella. Pero aquí parece surgir una divergencia con lo ya expuesto. Si digo: «El pensamiento de que (16 — 2) es un múltiplo de 7 es verdadero, entiendo *ver-*

dadero como una propiedad del pensamiento, y sin embargo habíamos llegado a la conclusión de que el pensamiento es el sentido de la proposición y lo verdadero, su significado. Ocurre que el concebir la verdad como una propiedad de proposiciones o de pensamientos tiene que ver con la expresión lingüística. Cuando decimos: «La proposición "$3 > 2$" es verdadera», enunciamos, de acuerdo con la forma lingüística algo acerca de la proposición: que tiene cierta propiedad que nosotros designamos con la palabra «verdadero». Y lo mismo se aplica al pensamiento, cuando decimos: «El pensamiento de que "$3 > 2$" es verdadero». Pero el predicado *verdadero* es enteramente diferente de los otros predicados, como, por ejemplo, verde, salado, racional; pues lo que queremos decir con la proposición «El pensamiento de que "$3 > 2$" es verdadero», lo podemos decir más sencillamente con la proposición «3 es mayor que 2». Para ello no necesitamos la palabra «verdadero». Y podemos ver que con este predicado no se le agrega nada al sentido. Para proponer algo como verdadero no se requiere ningún predicado especial, sino sólo el poder afirmativo con el cual pronunciamos la proposición.

No siempre que pronunciamos una proposición afirmativa lo hacemos con poder afirmativo. El actor en el escenario, el poeta que lee en público su obra, ambos pronunciarán con frecuencia proposiciones afirmativas, pero de las circunstancias se desprende que no las pronuncian con poder afirmativo. Solamente hacen como que afirman. Tampoco nosotros, en nuestra definición

$$\text{«}\left\{\begin{array}{l}(a-b)\text{ es un múltiplo de }7\\ \text{y}\\ a\text{ es un número entero}\\ \text{y}\\ b\text{ es un número entero}\end{array}\right\}=a\text{ es congruente con }b\text{, módulo }7\text{»},$$

pronunciamos con poder afirmativo cada parte aislada, como «$(a - b)$ es múltiplo de 7», «a es un número entero», «a es congruente con b, módulo 7», ni aun si sustituyéramos las letras «a» y «b» por nombres propios.

También podemos decir

$$\text{«}\left\{\begin{array}{l}(16-3)\text{ es un múltiplo de }7\\ \text{y}\\ 16\text{ es un número entero}\\ \text{y}\\ 3\text{ es un número entero}\end{array}\right\}=16\text{ es congruente con }3\text{, módulo }7\text{»},$$

aunque algunas de las proposiciones parciales son falsas, pues sólo que-

remos postular que lo que en la igualdad aparece a la derecha es de igual sentido que lo que aparece a la izquierda, sin juzgar acerca de la verdad de las proposiciones parciales.

Si alguien dice con poder afirmativo algo que sabe que es falso, miente. No así un actor en el escenario, que dice algo que es falso. No miente porque falta el poder afirmativo. Y si un actor dice en el escenario: «es verdadero que 3 es mayor que 2», no afirma en mayor grado que si dice: «3 es mayor que 2». Lo que importa no es la palabra «verdadero», sino sólo el poder afirmativo con que es pronunciada la proposición. Cuando decimos de una proposición o de un pensamiento, que es verdadero, es, pues, algo muy diferente de cuando decimos del agua de mar, por ejemplo, que es salada. En este caso agregamos con el predicado algo esencial; en aquel caso, no.

Esta observación confirma que el pensamiento se comporta respecto de su valor de verdad como sentido respecto del significado, en tanto ella indica que la verdad no es una propiedad de una proposición o de un pensamiento, como podríamos creer si nos guiáramos por el lenguaje.

Vimos que «($a - b$)» y «($a - b$) es un múltiplo de 7» se comportan de modo semejante en cuanto ambas adquieren un *sentido* y un *significado* al sustituirse «a» y «b» por nombres propios significativos. La única diferencia es que el sentido que adquiere «($a - b$)» es sólo parte de un pensamiento, mientras que el sentido que adquiere «($a - b$) es un múltiplo de 7» es un pensamiento. Si, en primer lugar, sustituimos solo «b» por el nombre propio «2», obtenemos «$a - 2$» y «($a - 2$) es un múltiplo de 7». Lo que en esta relación de signos está presente, fuera de la letra «b», es el signo de un concepto. Y la proposición «(16 — 2) es un múltiplo de 7» puede ser entendida como si constara del nombre propio «16» y aquel signo de concepto, de modo que enunciaríamos del número 16 dicho concepto. Tenemos la subsunción de un objeto bajo un concepto.

De igual modo, lo que, fuera de la letra «a», hay en «$a - 2$» puede ser considerado un signo, de modo que «16 — 2» aparece como compuesto del nombre propio «16» y ese signo que, como aquel signo de concepto, necesita ser completado. Lo que él designa, lo mismo que el concepto, debe ser algo que necesita ser completado. Nosotros lo llamamos *función*. El signo de concepto, completado por medio de un nombre propio, da como resultado una proposición. El signo de función, completado por medio de un nombre propio, da como resultado un nombre propio. En nuestro caso, el signo de función completado con los nombres propios «2», «3» y «4», da como resultado, según la serie, los nombres propios «2 — 2», «3 — 2» y «4 — 2».

A los objetos

$$2 - 2,\ 3 - 2,\ 4 - 2,$$

cuyos signos son aquellos nombres propios, los llamamos valores de nuestra función, de modo que

2 — 2 es el valor de nuestra función para el argumento 2
3 — 2 es el valor de nuestra función para el argumento 3
4 — 2 es el valor de nuestra función para el argumento 4.

Pero también lo que se obtiene de

«(a — 2) es un múltiplo de 7»,

sustituyendo «a» por un nombre propio, debe ser entendido como nombre propio; ya que designa un valor de verdad, y esto debe ser concebido como un objeto. Así, pues,

3 — 2 es un múltiplo de 7

es lo falso, y

16 — 2 es un múltiplo de 7,

lo verdadero. Hay pues una amplia coincidencia en los casos en que hablamos de función y en los que hablamos de concepto; y parece estar de acuerdo con los hechos concebir el concepto como función, como función cuyo valor es siempre un valor de verdad. Si, en efecto, concebimos aquel concepto como función, lo falso es el valor de esa función para el argumento 3 y lo verdadero es el valor de esa función para el argumento 16. Lo que se dé además de esto, por ejemplo, como sujeto lógico, aparece aquí como argumento.

Por medio de una definición no es posible decir qué es una función, porque se trata de algo simple y no analizable. Sólo es posible remitirse a aquello a que se hace referencia y, relacionándolo con lo conocido, hacerlo más claro. En remplazo de una definición debe ir siempre una aclaración que, por cierto, tendrá que contar con una buena comprensión.

Parece haber muy poca claridad acerca de lo que es una función. Para ella se usa a menudo la palabra «variable». Según ello parece, por lo pronto, que hubiese dos clases de números, los constantes o corrientes y los variables. Los primeros, según parece, son señalados mediante los ya conocidos signos numéricos; los últimos, mediante las letras «x», «y», «z». Pero esto no se puede conciliar con el procedimiento del análisis. Cuando tenemos la letra «x» en relación con otros signos, como en

«x — 2»,

el análisis requiere que sea posible sustituir esta «x» por diferentes signos numéricos, como en

$$\text{«}3 - 2\text{»}, \text{«}4 - 2\text{»}, \text{«}5 - 2\text{»}, \text{ etc.}$$

Pero aquí no se puede hablar de variación, pues cuando decimos que algo varía, lo que varía debe poder ser reconocido como lo mismo en la variación. Cuando un emperador envejece, varía. Pero eso sólo lo podemos decir porque él, a pesar de la variación, puede ser reconocido como el mismo. Pero cuando un emperador muere y su sucesor ocupa el trono, no se puede decir que aquél se transformó en éste, pues el nuevo emperador, no es, por supuesto, el mismo que el anterior. Lo mismo puede decirse cuando en «$x - a$» se sustituye «x», siguiendo la serie, por «3», «4», «5». No es aquí lo mismo que lo que, con el correr del tiempo, adquiere distintas propiedades: aquí se trata de números diferentes. Si la letra «x» designara un número variable, éste debería ser reconocido como el mismo, aunque con distintas propiedades. Pero 4 no es el mismo número que 3. No hay, pues, nada que podamos designar con el nombre «x». Si él significa 3, no significa 4; si significa 4, no significa 3. En la Aritmética y en el análisis. las letras sirven para dar generalidad de contenido a las proposiciones, también en el caso en que esto queda oculto por el hecho de que la mayor parte de la prueba se realiza con palabras. Allí todo debe ser sujeto a consideración, no sólo lo que va en fórmulas aritméticas. Se dice, por ejemplo: «a designa esto y esto, b designa esto y esto», y se lo toma como punto de partida de una investigación. En rigor, tenemos aquí proposiciones condicionales:

«si a es esto y esto»,
«si b es esto y esto»,

y éstas deben ser introducidas junto con las proposiciones que sigan, o pensadas en relación con ellas, y la totalidad adquiere generalidad mediante estas letras puramente indicativas. Pero cuando con «x» se designa la incógnita, como se acostumbra a decir, se trata de un caso distinto. Supongamos que hay que resolver la ecuación

$$\text{«}x^2 - 4 = 0\text{»}.$$

Como solución se obtendrá 2 ó -2. Pero también aquí se puede poner la ecuación en forma de proposición general: «Si $x^2 - 4 = 0$, $x = 2$; ó $x = -2$». En este punto es oportuno mencionar que la notación «$\pm\sqrt{4}$» es enteramente desdeñable. Aquí uno se ha dejado llevar inadvertidamente por el lenguaje. En rigor, la palabra «o» debe estar entre las dos proposiciones:

«x es igual a 2 ó x es igual a -2». Y las dos proposiciones se resumen en «x es igual a más o menos 2», escribiéndose, en consecuencia, $x=\pm\sqrt{4}$»; pero «$x=\pm\sqrt{4}$» no designa absolutamente nada, es un signo sin significado. Sí se puede decir

$$\text{«2 es igual a } +\sqrt{4} \text{ ó 2 es igual a } -\sqrt{4}\text{»},$$

donde el poder afirmativo se extiende a la totalidad, mientras que cada una de las proposiciones parciales es pronunciada sin poder afirmativo. Se puede decir, igualmente:

$$\text{«}-2 \text{ es igual a } +\sqrt{4} \text{ ó } -2 \text{ es igual a } -\sqrt{4}\text{»},$$

pero «2 es igual $\pm\sqrt{4}$» no tiene sentido.

Consideremos ahora el *concepto de raíz cuadrada de 4.* Si pensamos que «$2\times2=4$» se originó al ser reemplazada en «$\xi\times\xi$» la letra «ξ» por el signo numérico «2», entonces «$2\times2=4$» aparece como compuesto por el nombre «2» y un signo de concepto, que como tal necesita ser completado, y así, «$2\times2=4$» puede ser leído: «2 es raíz cuadrada de 4». Del mismo modo, «$(-2)\times(-2)=4$» puede ser leído: «(-2) es raíz cuadrada de 4». Pero la igualdad «$2=\sqrt{4}$» no podemos leerla: «2 es raíz cuadrada de 4», pues el signo «$\sqrt{4}$» no puede ser de doble significado. El doble significado o multiplicidad de significados de los signos no debe ocurrir bajo ninguna condición. Si el signo «$\sqrt{4}$» fuera de doble significado, no se podría decir si la proposición «$2=\sqrt{4}$» es verdadera, y justamente por eso no se podría llamar proposición a esa relación de signos, porque quedaría indeterminado qué pensamiento expresa. Los signos deben estar aclarados de tal manera, que siempre esté determinado qué significa «$\sqrt{4}$», si el número 2 ó algún otro. Al signo-igual lo hemos conocido como signo de identidad. Y así debe ser entendido en «$2=\sqrt{4}$». «$\sqrt{4}$» se refiere a un objeto y «2» se refiere a un objeto. Podemos, pues, leer: «2 es la raíz cuadrada positiva de 4»; y al hacerlo debemos entender el «es» como signo de identidad y no como simple cópula.

No se puede leer «$2=\sqrt{4}$» como«2 es una raíz cuadrada de 4», pues, al hacerlo, «es» sería cópula. Al juzgar: «2 es una raíz cuadrada de 4», estoy subsumiendo el objeto 2 bajo un concepto. Siempre que el sujeto lingüístico es un nombre propio, mientras que el predicado está formado por «es» y un sustantivo unido al artículo indeterminante, estamos frente a un caso como ese. Entonces «es» es siempre cópula y el sustantivo es un nombre apelativo. En todos los casos como éste se subsume un objeto bajo un concepto. La identidad es algo completamente diferente. Y, sin

embargo, se escribe a veces un signo-igual cuando se trata de una subsunción. El signo «$\sqrt{4}$» no está, de ningún modo, incompleto, sino tiene el carácter de un nombre propio. Por lo tanto, no puede designar un concepto y, en el lenguaje, no puede estar representado por un nombre apelativo con artículo indeterminante o sin artículo. Si lo que está a la izquierda del signo-igual es un nombre propio, también lo que está a la derecha de él debe ser nombre propio o transformarse en ello con sólo sustituir las letras por signos significativos.

Pero volvamos, después de esta digresión, a nuestro asunto. Las *letras* sirven en Aritmética para dar generalidad de contenido a las proposiciones, allí donde ellas no ocupan el lugar de un número desconocido; pero no para designar un número variable, pues números variables no hay. Toda variación ocurre en el tiempo. Y las leyes de los números son atemporales y eternas. En Aritmética y en análisis el tiempo no cuenta. Sólo en la aplicación de la Aritmética puede intervenir el tiempo. El número 3 siempre ha sido y será un número primo. ¿Cómo habría de ser posible una variación? Que es inadecuado hablar de número variable es algo que se siente, y por ello se prefiere decir «cantidad variable», como si eso cambiara mucho las cosas. Una vara de hierro se alarga, por cierto, al ser calentada y se acorta al enfriarse; la variación se produce en el tiempo. Si se la mide con una regla milimetrada se obtiene ya este número, ya este otro. Si decimos: «el número mediante el cual se expresa la longitud de esta vara para el tiempo t», esta expresión contiene la letra «t», que es un indicador indeterminado. Esta letra se convertirá así en el nombre propio de un número, al ser reemplazada por el nombre de una unidad temporal. Esto es muy similar a lo que tenemos en la expresión «$x - 2$». También ésta se convierte en nombre propio de un número, al ser reemplazada «x» por el nombre de un número. En ambos casos se trata de una función que, llenada con diferentes argumentos, puede dar como resultado diferentes valores funcionales. La vara de hierro y el tiempo son, en el fondo, inesenciales para la Aritmética, pues ésta no se ocupa ni de guijarros ni de granos de pimienta, ni de trenes, ni de hileras de libros, ni de varas de hierro, ni de espacios de tiempo. Estas son cosas que pueden aparecer en la aplicación, pero que no tienen que ver con la construcción del sistema de la matemática.

Todas estas consideraciones nos llevan al reconocimiento de que en la Aritmética no hay lugar para números variables ni para cantidades variables. «Cantidad» es, o bien una expresión cauta para número —y entonces no hay cantidades variables, por cuanto tampoco hay números variables— o bien se la entiende de tal modo que se pueda hablar con derecho de cantidades variables, pero entonces éstas no pertenecen a la Aritmética.

Si las letras «x» e «y» designaran variantes distintas, debería poder decirse en qué se diferencian; pero nadie puede decirlo. Siempre hay que tener presente que se trata de Aritmética pura, no de aplicaciones. Aun podría argumentarse que las letras «x» e «y» no son signos de variables, sino las variables mismas. Pero ello iría contra el uso establecido de los signos. Por ejemplo, para el signo-igual, se supone siempre que el signo, simple o compuesto, que aparece a la izquierda es, o bien un nombre propio significativo, o se convierte en ello al sustituirse las letras por signos.

Es, por lo tanto, imposible explicar lo que es función mediante aquello que se llama variable. Al querer explicarse qué es una variable, siempre se vuelve a aquello que hemos llamado función y así se advierte que, propiamente, la variable no es un objeto de la Aritmética.

(Vimos que el concepto puede ser concebido como un caso especial de función. Al concepto le hemos exigido una delimitación estricta. En el caso más general de la función se tiene algo similar.)

Sobre lo que es una función no hay todavía certeza total. Sobre todo se confunde fácilmente la función con el valor de la función, como cuando se escribe

$$«f\,x=f»,$$

usándose la letra, a un lado para indicar la función, al otro lado para indicar el valor de la función. Hay, por cierto, un obstáculo que hace difícil aprehender correctamente la esencia de la función. Este obstáculo reside en la expresión lingüística. Decimos «la función» y «el concepto», expresiones que no se pueden evitar y que, sin embargo, no son adecuadas. El artículo determinante convierte a estas expresiones, por su forma, en nombres propios en sentido lógico, como si designaran objetos; y eso es justamente lo que no hacen. Precisamente lo esencial de la función y del concepto, el no estar completados, se oculta con esos nombres. El lenguaje nos obliga a una expresión inadecuada. Evitar este inconveniente es difícil, pero se puede apartar estando siempre consciente de esta inadecuación. Entonces no se confundirá el valor de la función con la función misma.

También se habla de función cuando se está en presencia de casos como $(1+x)^2$. Aquí «$1+x$» aparece en el lugar del argumento de la función cuadrado, de manera que la función «$1+x$» parecería ser el argumento de la función cuadrado. Pero «$1+x$» no designa una función, sino indica, de manera indeterminada, el valor de una función. Si en «$(1+x)^2$» reemplazamos «x» por «3», obtenemos $(1+3)^2$, y aquí el valor de la función $1+\xi$ para el argumento 3 es el argumento de la función cuadrado. Pero este argumento es un objeto, un número. Aquí tenemos un caso de composi-

ción de una función a partir de dos funciones, tomando el valor de la primera función como argumento del argumento de la segunda función. Debemos insistir siempre en la diferencia básica entre objeto y función. Donde se encuentre un nombre de objeto, un nombre propio, no puede estar ningún nombre de función; y viceversa, donde se encuentra un nombre de función no puede estar ningún nombre propio.

También en el caso de que la función tenga el mismo valor para cada argumento debe diferenciarse ese valor de la función misma. De modo que la función

$$1+\xi-\xi$$

es diferente del número 1. No debe decirse: «$1+\xi-\xi=1$, y el signo-igual es signo de identidad, luego, la función $1+\xi-\xi$ es, simplemente, el número 1», pues cuando decimos «la función $1+\xi-\xi$», la letra «ξ» no es parte del signo de función; en efecto, el nombre propio «$1+3-3$» se compone del nombre de función y el nombre propio «3», y la letra «ξ» no aparece para nada. En la proposición «$1+a-a=1$», la letra a tiene por finalidad otorgar generalidad de contenido a la proposición, mientras que la letra «ξ», cuando digo «la función $1+\xi-\xi$» tiene por fin dar a conocer los lugares donde irán los nombres propios que completen la proposición. Para hallar el cociente incremental de una función para el argumento 3, restamos el valor de la función para el argumento 3 del valor de la función para el argumento $(3+k)$ y dividimos la diferencia por k, etcétera. Para el caso de la función $1+\xi-\xi$ esto se representa en la fórmula

$$«\frac{[1+(3+k)-(3+k)]-[1+3-3]}{k}».$$

Pero en el nombre propio «1» no tenemos lugares en los que podamos poner una vez «$3+k$» y otra vez «3». Sólo con una función se puede proceder según lo dicho.

Si se quiere definir el uno diciendo «uno es una cosa», se comete un error; pues en virtud del artículo indeterminante, «una cosa» debe ser entendido como palabra concepto. Pero entonces la palabra «es» es cópula y no pertenece al predicado. Tenemos, pues, la subsunción del objeto uno bajo un concepto. Y eso no es una definición. Una definición consiste siempre en establecer que un nuevo signo o palabra significa lo mismo que un signo compuesto ya conocido. Cuando en la definición usamos la palabra «es», ésta debe ser entendida como signo de identidad, no como cópula. Si a la izquierda de este signo de identidad hay un nombre propio, también a la derecha debe haber un nombre propio, mientras que «una cosa» es un nombre apelativo.

Así como las funciones con un argumento son básicamente diferentes de los objetos, también las *funciones con dos argumentos* son básicamente diferentes de las funciones con un argumento.

Al completar el signo de una función con un argumento por medio de un nombre propio, obtenemos un nombre propio. Por ejemplo, a partir del signo de función «ξ 2» y el nombre propio «3» obtenemos el nuevo nombre propio «3 — 2». En «ξ — 2», la letra «ξ» sólo tiene el fin de dejar abierto el lugar para el signo del argumento. Del mismo modo, a partir del signo del concepto «$\xi > 0$» obtenemos, mediante el nombre propio «1», «$1 > 0$» y esto es el nombre de algo verdadero.

Una función con dos argumentos necesita ser doblemente completada. En «$\xi - \zeta$» tenemos un signo de función con dos argumentos. Las letras «ξ» y «ζ» dejan abiertos los lugares para los signos de argumento. La diferencia de las letras «ξ» y «ζ» indica que en los dos lugares pueden colocarse diferentes signos de argumento. Al colocar el nombre propio «2» en el lugar del argumento ζ, obtenemos en «$\xi - 2$» un signo de función de una función con argumento. De igual manera resulta del signo de relación «$\xi > \zeta$» el signo de concepto «$\xi > 0$». Así, completando parcialmente, se obtiene de funciones con dos argumentos, funciones con un argumento, y de relaciones, conceptos. Esto puede ocurrir de otra manera si se suprime la diferencia entre los lugares de los argumentos. Si escribo «$\xi - \xi$», con la letra «ξ» a ambos lados estoy indicando que en ambos lugares debe colocarse el mismo nombre propio, y con ello tengo el nombre de una función con un argumento. Si a esto lo llamo «nombre de una función», ello debe entenderse con cierto cuidado. El nombre propio que obtenemos al completar esa función con un nombre propio, por ejemplo «3 — 3», no contiene la letra «ξ», aunque contiene ese nombre de función. Esta «ξ» no es, pues, un componente del nombre de función, sino sirve solamente para indicar cómo debe relacionarse el signo de función con el nombre propio que la llena. Con esta «ξ» obtenemos una indicación para el uso del nombre de función. De un signo de relación podemos formar, de modo similar, un signo de concepto suprimiendo la diferencia entre los lugares de los argumentos. De este modo obtenemos, del signo de relación «$\xi > \zeta$», el signo de concepto «$\xi > \xi$».

Hemos visto que el valor de una función puede aparecer como argumento de una segunda función. A la primera la podemos llamar función cerrada, a la segunda, función cerrante. Así podemos formar un signo de relación a partir del nombre de una función con dos argumentos y un signo de concepto, en el cual el concepto es la función cerrante. Sea, por ejemplo, «$\xi - \zeta$» el signo de la función con dos argumentos, y «ξ es múltiplo de 7» el signo de concepto. Y entonces «($\xi - \zeta$) es múltiplo de 7» se convierte en el nuevo signo de relación.

El concepto debe estar estrictamente delimitado, es decir que de cada objeto debe poder decirse si cae o no dentro del concepto. Debe evitarse la indeterminación. De ahí se sigue algo equivalente para la relación, pues al completársela parcialmente se obtendrá de la relación un concepto. Este debe estar estrictamente delimitado. Y, en general, todo concepto que resulte de completar parcialmente la relación debe estar estrictamente delimitado. Esto significa, en otras palabras, que cada objeto, respecto de cada objeto, debe estar o no estar en relación. Una tercera posibilidad debe estar excluida. Si aplicamos esto a la relación $(\xi - \zeta)$ es múltiplo de 7, resulta que del signo compuesto «$\xi - \zeta$» siempre debe surgir un nombre propio significativo al sustituirse las letras «ξ» y «ζ» por nombres propios significativos; es decir, no sólo cuando se colocan signos numéricos. El signo-menos debe estar de tal manera aclarado, que siempre resulte un significado de la relación de signos, cualesquiera sean los nombres propios significativos que se coloquen a la izquierda y a la derecha de él. De este modo quedan planteadas las siguientes exigencias:

Todo signo de una función con un argumento debe estar aclarado de tal manera que resulte un significado, sea cual fuere el signo significativo de argumento que se tome para completar la relación.

Todo signo de una función con dos argumentos debe estar aclarado de tal manera que resulte un significado, sean cuales fueren los signos significativos de argumento con los que se complete la relación.

Se puede, por ejemplo, establecer que el valor de la función $\xi - \zeta$ siempre ha de ser el de falsedad, cuando uno de los dos argumentos no es un número, sea lo que fuere el otro argumento. Claro que entonces debería también quedar establecido qué es un número.

(Igualmente, se puede establecer que el valor de la función $\xi > \zeta$ ha de ser el de falsedad, cuando uno de los dos argumentos no sea un número real, sea lo que fuere el otro argumento.)

Pero precisamente a ese respecto han cambiado las opiniones. En un principio, de los números sólo se conocían los enteros positivos, más tarde vinieron los quebrados, los números negativos, los números irracionales y los números complejos. De modo que, con el correr del tiempo, con la palabra «número» se fueron asociando conceptos cada vez más amplios. A ello se agrega que también el signo de adición cambió de significado. Y lo mismo ocurrió con otros signos. Es, por cierto, un proceso que la lógica debe juzgar, y que es también más peligroso cuanto menos consciente se es de este desplazamiento. La historia de la ciencia toma así una dirección opuesta a las exigencias de la lógica. Siempre debemos diferenciar entre la historia de la ciencia y el sistema de la ciencia. En la historia tenemos desarrollo, en el sistema, inmovilidad. El sistema puede perfeccionarse, pero lo que está debe permanecer, de lo contrario todo el

sistema debe ser deshecho para poder construir uno nuevo. Sólo en el sistema se realiza la ciencia. No es posible renunciar al sistema. Sólo por medio del sistema se llega a una total claridad y orden. Ninguna ciencia puede dominar tanto su material y elaborarlo hasta llegar a tanta claridad como la matemática; pero, posiblemente, ninguna ciencia puede perderse en una niebla tan oscura como le ocurre a la matemática cuando renuncia a la construcción del sistema.

En el desarrollo de la ciencia puede ocurrir que un sistema ya no satisfaga; no porque en parte tenga que ser reconocido como falso, sino porque surja el justo deseo de abarcar muchos detalles en una visión más general para lograr mayor claridad y una mayor simplicidad de exposición. Esto conducirá a introducir conceptos y relaciones más generales, es decir, de más alto nivel. Esto tiene que ver con lo que se llama ampliación de un concepto. Esto es una forma poco exacta de expresión, pues, en rigor, no se trata de modificar el concepto, sino de asociar con una palabra o signo de concepto otro concepto de mayor nivel que el que se asociaba antes con éstos. No cambia el sentido ni cambia el signo, cambia el ordenamiento de signo y sentido. Así puede ocurrir que proposiciones que antes significaban algo verdadero, signifiquen ahora algo falso. Las pruebas anteriores pierden su fuerza. Todo tambalea. Todos estos inconvenientes se pueden evitar si, en lugar de otorgar nuevos significados a viejos signos y expresiones, se introducen nuevos signos para los nuevos conceptos. Pero, por lo general, esto no ocurre y se siguen usando los mismos signos. Con un sistema con definiciones útiles, que no están allí como simple adorno, se echa un cerrojo a los cambios de que hablábamos. En suma, se trata de introducir nuevas designaciones para los nuevos conceptos, relaciones y funciones que aparezcan, o bien de abandonar ese sistema y construir uno nuevo. De hecho carecemos de un sistema en la Aritmética. Sólo tenemos premisas. Se proponen definiciones, pero los mismos que las proponen no las toman en serio ni se atienen a ellas. Y así nos faltan los límites, que podrían impedir que, sin advertirlo, asociemos, con una palabra o con un signo, un significado que no corresponde.

Usamos el signo de adición, por ahora, sólo para el caso en que él aparece entre números positivos, y aclaramos su uso para ese caso, y nos abstenemos de ampliar esta aclaración para otros casos; pero esta forma de definir parte por parte no es admisible, pues mientras el signo esté definido de forma incompleta, se podrán formar con él signos que deben ser entendidos como signos de conceptos y, sin embargo, son inadmisibles como tales porque el concepto designado no estaría estrictamente delimitado, no pudiendo, entonces ser reconocido como concepto. Un signo de concepto como ése sería, por ejemplo, «$3+\xi \neq 5$». Ahora bien, se puede demostrar que 2 cae dentro de este concepto, puesto que $3+2=5$. Pero

quedaría sin decidir si no hay otros objetos que entran dentro de ese concepto y cuáles podrían ser, mientras el signo de adición no sea aclarado en forma completa. Probablemente sería imposible construir el sistema sin ir escalando paso a paso desde los casos más simples a los más complicados, de modo semejante a lo que ocurre en el desarrollo histórico. Pero, al hacerlo, no debemos caer en el error de usar el mismo signo «+» a través de todas esas transformaciones. Por ejemplo, cuando se trata de la adición de números enteros positivos, podríamos usar el signo «$\neg$», pero deberíamos aclararlo completamente, de modo que, sea lo que fuere aquello que se tome como argumento ξ y como argumento ζ en la función $\xi \neg \zeta$, el valor de la función esté definido. Podríamos establecer, por ejemplo, que el valor de esta función será falso cuando uno de los dos argumentos sea algo distinto de un número entero positivo.

Deben, pues, ser desechados el *definir parte por parte* y aquello que se suele llamar ampliación gradual de un concepto. La definición debe ser hecha en un solo paso, pues mientras un concepto no esté completamente definido, no está estrictamente definido y no puede ser definido como tal.

Veamos una vez más el camino que acabamos de recorrer.

La proposición tiene un sentido, y al sentido de una proposición enunciativa lo llamamos pensamiento. Una proposición es pronunciada con poder afirmativo o sin él. Para la ciencia no basta que una proposición tenga sólo un sentido, debe tener también un valor de verdad, y a éste llamamos significado de la proposición. Si una proposición tiene un sentido pero no un significado, ella pertenece a la poesía pero no a la ciencia.

El lenguaje tiene la capacidad de expresar una cantidad incalculable de pensamientos con relativamente pocos medios. Esto es posible porque el pensamiento está formado por partes que se corresponden con partes de proposiciones que las expresan. El caso más simple es el de un pensamiento que consta de una parte acabada y una parte incompleta. A ésta la podemos llamar parte predicativa. Cada una de estas partes, a su vez, debe tener un significado para que toda la proposición tenga un significado, un valor de verdad. Al significado de la parte cerrada o acabada la llamamos *objeto,* al de la parte incompleta, o que necesita ser completada, o parte predicativa la llamamos *concepto.* La relación en la que son puestos el objeto y el concepto, por medio de la proposición, puede ser llamada *subsunción* del objeto bajo el concepto. El objeto y el concepto son fundamentalmente diferentes. A la parte cerrada de la proposición la llamamos nombre *propio* del objeto al cual designa. A la parte que necesita ser completada la llamamos *palabra-concepto* o *signo-concepto.* Al concepto debemos exigirle una delimitación estricta. Ambas partes de la pro-

posición, el nombre propio y la palabra-concepto, pueden, por su parte, ser compuestas. El nombre propio puede constar, a su vez, de una parte cerrada y de una parte incompleta. Aquella es nuevamente un nombre propio y designa un objeto, al que llamamos signo de función. El signo-concepto, completado con un nombre propio, da como resultado una proposición cuyo significado es un valor de verdad. El signo de función, completado con un nombre propio, da como resultado un nombre propio cuyo significado es un objeto. Reducimos a ambos a un mismo criterio en tanto reconocemos al concepto como función, como una función cuyo valor es siempre un valor de verdad, y en tanto reconocemos el valor de verdad como objeto. El concepto es entonces una función cuyo valor es siempre un valor de verdad.

Pero también el signo de función puede ser compuesto, esto es, de una parte cerrada, que nuevamente es un nombre propio, y de una parte que necesita ser doblemente completada: el nombre o signo de una función con dos argumentos. A una función con dos argumentos cuyo valor es siempre un valor de verdad la llamamos relación. A la exigencia de estricta delimitación de los conceptos le corresponde la exigencia más general de que el nombre de una función con un argumento, completado con un nombre propio, debe dar un nombre propio significativo. Lo mismo vale para las funciones con dos argumentos.

Volvamos ahora un poco más atrás aún. Hemos reconocido la necesidad de erigir la matemática en sistema, para lo cual no se excluye la posibilidad de diferentes sistemas. Como fundamentos de un sistema propusimos

1) los axiomas y
2) las definiciones.

Los *axiomas* sirven en el sistema como premisas para las conclusiones, por medio de las cuales se construye el sistema; pero no se presentan como verdades resultantes de conclusiones. Puesto que son premisas, deben ser verdaderas. Un axioma que no sea verdadero es una contradicción. En la expresión de un axioma no puede intervenir nada desconocido.

De índole muy diferente son las *definiciones*. Con ellas se da un significado a una palabra o signo que hasta el momento no tenía significado. La definición debe, pues, contener un nuevo signo. Al dársele a éste un significado por medio de la definición, se transforma en una proposición independiente que puede ser usada como premisa de conclusiones en la construcción del sistema. ¿En qué consiste esta manera de demostrar?

Supongamos que tenemos una proposición de la forma: «Si *A* es válido, entonces *B* es válido». Agreguemos a ésta la proposición «*A* es válido» y así podemos concluir de estas dos premisas que «*B* es válido». Pero para que la conclusión sea verdadera, las dos premisas deben ser verdaderas.

Y por ello también los axiomas deben ser verdaderos, si han de servir de premisas, pues de algo falso no se puede concluir nada. Pero alguien podría preguntarse si no es posible extraer conclusiones de una proposición que tal vez sea falsa, para ver qué resultaría si fuera verdadera. Sí, en cierto sentido es posible. De las premisas

Si Γ es válido, entonces Δ es válido.
Si Δ es válido, entonces *E* es válido,

se puede concluir:

Si Γ es válido, entonces *E es válido.*

A partir de ésta y de la nueva premisa

Si *E* es válido, entonces *Z* es válido,

se concluye:

Si Γ es válido, entonces *Z* es válido.

Y así se pueden extraer nuevas conclusiones, sin saber si Γ es verdadero o falso. Pero la diferencia es notable. En nuestro ejemplo, la premisa «si *A* es válido» desaparece por completo en la conclusión. Se ha mantenido como condición, si Γ es válido». Esta sólo puede desaparecer como condición, cuando hemos reconocido que ha sido cumplida. En ese caso, «Γ es válido» no puede ser considerada premisa; como premisa tenemos

Si Γ es válido, entonces Δ es válido,

o sea algo, de lo cual «Γ es válido» es sólo una parte. Toda esta premisa debe ser verdadera; pero esto es posible sin que se cumpla la condición, sin que Γ sea válido. En rigor no puede decirse que aquí se sacan conclusiones de un pensamiento falso o dudoso, pues éste no se da independiente en forma de premisa, sino que es sólo parte de una premisa; y ésta debe, sí, ser verdadera, pero también puede serlo sin que el pensamiento parcial que está contenido en ella como condición sea verdadero.

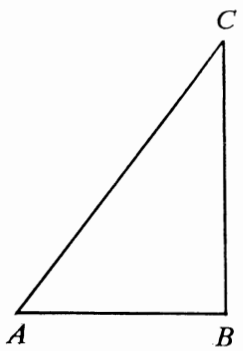
Aparentes conclusiones a partir de algo falso, como ésta, las encontramos en la *prueba indirecta.*

Se trata, por ejemplo, de demostrar que en un triángulo el lado mayor se opone al ángulo mayor.

Se trataría de probar:

$$\text{Si } \sphericalangle B > \sphericalangle A,$$

entonces $AC > BC$.
Tomamos como datos conocidos:



I) Si $BC > AC$,
entonces $\sphericalangle A > \sphericalangle B$

II) Si $BC = AC$,
entonces $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

III) Si no es $AC > BC$, y
si no es $BC > AC$, entonces $BC = AC$.

IV) Si $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, entonces no es
$\sphericalangle B > \sphericalangle A$.

V) Si $\sphericalangle A > \sphericalangle B$, entonces no es
$\sphericalangle B > \sphericalangle A$.

De II) y III) se sigue:

Si no es $AC > BC$, y si no es $BC > AC$, entonces $\sphericalangle A \neq \sphericalangle B$.

De esto y de IV) se sigue:

Si $AC > BC$, y si no es $BC > AC$, entonces no es $\sphericalangle B > \sphericalangle A$.

De I) y V) se sigue:

Si $BC > AC$, entonces no es $\sphericalangle B > \sphericalangle A$.

De las dos últimas proposiciones se sigue:

Si no es $AC > BC$, entonces no es $\sphericalangle B > \sphericalangle A$.

De esto y por contraposición se sigue:

Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, entonces $AC > BC$.

Para simplificar el asunto voy a suponer que no se trata aquí de triángulos en general, sino de un determinado triángulo. $\sphericalangle$ A y $\sphericalangle$ B pueden ser entendidos como números, los cuales resultarán de la medición de los

ángulos por medio de una determinada unidad, como por ejemplo, el ángulo recto. También AC y BC pueden ser entendidos como números, resultantes de la medición de los lados del triángulo por medio de una unidad, por ejemplo, el metro. Los signos «$\sphericalangle A$», «$\sphericalangle B$», «AC» y «BC» deben, pues, ser entendidos como nombres propios de números.

Vemos que aquí «AC no es mayor que BC» no aparece como premisa, sino que la premisa III) contiene esto como condición. En rigor no se puede, pues, decir que del pensamiento falso (AC no es mayor que BC) se hayan extraído conclusiones. Por ello no se debería decir propiamente: «suponiendo que no fuera $AC > BC$», porque de ese modo parecería que esto (que no es $AC > BC$) sirviera como premisa para la conclusión, mientras que sólo es una condición.

La peculiaridad de la prueba indirecta sigue siendo sobrevalorada. Pero, en verdad, la diferencia entre prueba directa y prueba indirecta no es, de ningún modo, importante.

También podemos realizar la prueba de este otro modo.

Tomamos como datos conocidos:

I') Si no es $\sphericalangle A > \sphericalangle B$, entonces no es $BC > AC$.

II') Si no es $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, entonces no es $BC = AC$.

III') Si no es $\sphericalangle BC > \sphericalangle AC$, y si no es $BC = AC$, entonces es $AC > BC$.

IV') Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, entonces no es $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

V') Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, entonces no es $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

De V') y I') se sigue:

Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, entonces no es $BC > AC$.

De esto y de III') se sigue:

Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, y si no es $BC = AC$, entonces es $AC > BC$.

De IV') y II') se sigue:

Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, entonces no es $BC = AC$.

De las dos últimas proposiciones se sigue:

Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, entonces es $AC > BC$.

En esta prueba no hemos admitido nunca, ni siquiera como hipótesis, que *AC* no sea mayor que *BC*.

También si examina los *Fundamentos de la Geometría* se encontrará que aparentemente se extraen conclusiones de algo falso o dudoso. ¿No podríamos preguntarnos qué pasaría si el axioma de las paralelas no fuera válido? En ese caso habría sólo dos posibilidades: o bien no se hace ningún uso del axioma de las paralelas y se averigua hasta dónde se puede llegar con los otros axiomas, o bien se admite algo que justamente contradice dicho axioma. Sólo este caso puede entrar aquí en consideración. Pero hay que tener siempre presente que lo que es falso no puede ser axioma, por lo menos, si se usa la palabra «axioma» en su sentido habitual. ¿Cómo es, entonces? ¿Se puede reconocer como tal el axioma de las paralelas? ¿Siempre una recta que corta una de dos paralelas corta también la otra? En rigor, cada uno puede dar su propia respuesta a esta pregunta. Yo puedo decir solamente: mientras entienda las palabras «recta», «paralela» y «cortar» como las entiendo, deberé reconocer el axioma de las paralelas. Si alguien no lo reconoce, hay que suponer que entiende esas palabras de otra manera. El sentido de ellas está inseparablemente unido al axioma de las paralelas. En consecuencia, un pensamiento que contradiga a dicho axioma no puede ser tomado como premisa de una conclusión. Pero un pensamiento hipotético verdadero cuya condición contradijera al axioma de las paralelas, podría ser usado como premisa. Mantendríamos entonces esta condición en todos los juicios que se dieran en la cadena de deducciones. Si de este modo llegamos a un juicio hipotético cuya consecuencia contradijera a axiomas conocidos, podríamos deducir de ello que la condición que contradice al axioma de las paralelas es falsa, y con ello habríamos probado el axioma de las paralelas con ayuda de otros axiomas. Pero así quedaría éste despojado de su rango de axioma, puesto que habría sido probado. En realidad, habríamos efectuado una prueba indirecta.

Pero si nunca llegáramos a una contradicción, aunque siguiéramos adelante con nuestras conclusiones, nos parecería cada vez más aceptable la imposibilidad de probar nuestro axioma, sin que, sin embargo, ésta sea probada.

En sus *Fundamentos de la Geometría,* Hilbert se ha ocupado de cuestiones como la de si los axiomas no se contradicen unos a otros y si no serían independientes unos de otros. Pero en su trabajo la palabra «axioma» ha cambiado de sentido. En efecto, si un axioma debe necesariamente ser verdadero, es imposible que los axiomas se contradigan unos a otros. No es necesario gastar palabras en explicar esto. Pero aunque sea evidente, Hilbert no parece haber tenido conciencia de que, cuando habla de contradicción e independencia de los axiomas, no está usando la

palabra en el sentido de Euclides. Puede decirse que en Hilbert la palabra «axioma» oscila entre varios significados, sin que él se dé cuenta. Si se examina el texto de uno de sus axiomas, en principio parece tratarse de un axioma del estilo de los euclideanos; pero el texto engaña porque todas las palabras están usadas de manera diferente que en Euclides. Allí leemos, en el § 3: «*Aclaración:* Los puntos de una recta están en una cierta relación unos con otros, para cuya descripción no sirve especialmente la palabra "entre"». Y aquí se introducen cuatro axiomas que completan esta aclaración.

II 1) Si *A, B, C* son puntos de una recta y *B* está entre *A* y *C,* entonces *B* está también entre *C* y *A.*

II 2) Si *A* y *C* son puntos de una recta, siempre hay, por lo menos, un punto *B* que está entre *A* y *C,* y, por lo menos, un punto *D,* de modo que *C* está entre *A* y *D.*

II 3) De tres puntos de una recta siempre hay uno, y uno solo, que está entre los otros dos.

II 4) Cuatro puntos cualesquiera de una recta, *A, B, C, D,* pueden siempre estar ordenados de tal manera que queden: *B* entre *A* y *C* y también entre *A* y *D,* y *C* entre *A* y *D* y también entre *B* y *D.*

Según Hilbert, estos axiomas serían partes de una definición. En consecuencia debería aparecer en estas proposiciones un signo que hasta el momento no tenía significado, y al que se le da uno mediante la totalidad de esas proposiciones. Ese signo parece ser la palabra «entre». Pero una proposición que exprese un axioma no debe contener signos nuevos. En ella todo debe ser conocido. Mientras la palabra «entre» no tenga un sentido, la proposición: «Si *A, B, C* son puntos de una recta y *B* está entre *A* y *C,* entonces *B* está también entre *C* y *A*» no expresará ningún pensamiento.

Un axioma, en cambio, es siempre un pensamiento verdadero. Lo que no expresa ningún pensamiento no puede, pues, expresar ningún axioma. Y, sin embargo, al leer la primera de estas proposiciones se tiene la impresión de que podría ser un axioma. Pero se debe solamente a que ya estamos acostumbrados a unir un sentido a la palabra «entre». Si en lugar de

«*B* está entre *A* y *C*»

dijéramos

«*B* pat *A* nam *C*»

no asociaríamos con ello ningún sentido. En lugar del llamado axioma II 1) tendríamos la proposición

«Si *B* pat *A* nam *C*, entonces *B* pat *C* nam *A*».

Nadie para quien estas sílabas «pat» y «nam» sean nuevas asociará un pensamiento con esta proposición aparente. Lo mismo puede decirse de los tres restantes pseudoaxiomas.

Ahora cabe preguntarse si, por lo menos *a posteriori,* con la ayuda de la totalidad de estas proposiciones aparentes, una proposición como

«*B* pat *A* nam *C*»

adquiere sentido, entendiendo por *A, B, C* puntos de una recta. Yo creo que no. Podría proponerse por adivinanza que ello quiere decir

«*B* está entre *A* y *C*»,

pero sólo por adivinanza. ¿No podría el acertijo tener varias soluciones?

¿Pero debe una definición determinar de un modo unívoco? ¿No es deseable, en ciertas circunstancias, cierto margen de posibilidades? En $a^2=4$ no está determinado de modo inequívoco lo que significa *a;* ¿y es eso un inconveniente? Ahora bien, si *a* tiene que ser un nombre propio cuyo significado tiene que ser establecido, nunca se cumpliría este propósito. Por el contrario, en él puede encontrarse designado un concepto bajo el cual entran los números 2 y -2. Entonces la duplicidad de significado no molesta para nada, pero no tenemos ninguna definición de un objeto.

Si queremos comparar este caso con el de nuestro pseudoaxioma, para ello debemos comparar la letra «*a*» con «entre» o con «pat-nam». Debemos diferenciar los signos que designan de los que simplemente indican. Así como la letra «*a*» no designa, propiamente, nada, tampoco lo hacen las palabras «entre» o «pat-nam». No hay que tener en cuenta aquí que habitualmente asociamos un sentido con la palabra «entre». En relación con esto, ella tiene tan poco sentido como la expresión «pat-nam». Pero con decir que un signo puramente indicador no designa nada ni tiene un sentido, no está dicho que no pueda contribuir a la expresión de un pensamiento. Y puede en tanto dar generalidad de contenido a una proposición o a una totalidad formada por proposiciones.

Pero entre nuestros dos casos hay, por cierto, una diferencia, ya que «*a*» representa a un nombre propio, mientras que «pat-nam», en cambio, representa la designación de una relación con tres fundamentos. En efecto,

así como a una función con un argumento, cuyo valor siempre es un valor de verdad, la llamábamos concepto, y así como a una función con dos argumentos, cuyo valor es siempre un valor de verdad, la llamábamos relación, ahora, dando un paso adelante, podemos llamar a una función con tres argumentos, cuyo valor es siempre un valor de verdad, *relación con tres fundamentos.* Ni «entre-y» ni «pat-nam» designan una relación con tres fundamentos, pero la indican, así como «*a*» indica un objeto. Pero de todos modos hay una diferencia. En «$a^2=4$» podríamos encontrar designado un concepto.

¿A qué corresponde esto en nuestros pseudoaxiomas? Yo lo llamo *concepto de segundo grado.* Para ver más claramente qué entiendo por esto véanse las siguientes proposiciones:

«Hay un número positivo».
«Hay una raíz cúbica de 1».

Aquí reconocemos algo en común. Se enuncia algo, pero no de un objeto, sino de un concepto. En la primera proposición es el concepto *número positivo,* en la segunda, el concepto *raíz cúbica de 1.* Y ambos casos se dice del concepto que no está vacío, sino lleno. Es cierto que es erróneo decir «El concepto *número positivo* está lleno», pues con ello transformo el concepto en un objeto, como se puede ver por el artículo determinante en «el concepto». Parecería, entonces, que «el concepto *número positivo*» fuese un nombre propio que designara un objeto y que de ese objeto se dijera que está lleno. Pero, de hecho, no tenemos aquí ningún objeto. El lenguaje nos obliga a usar una expresión impropia, pero de hecho existe una analogía. Lo que designamos con «un número positivo» se comporta respecto de lo que designamos con «hay» analógicamente a un objeto (por ejemplo, la Tierra) respecto de un concepto (por ejemplo, planeta).

Diferencio conceptos bajo los cuales caen objetos, como conceptos de primer grado, de los conceptos de segundo grado, bajo los cuales caen conceptos de primer grado. Desde ya que todas estas expresiones deben entenderse en sentido figurado, pues tomadas literalmente serían incorrectas. También se pueden distinguir conceptos de segundo grado bajo los cuales caen relaciones. Si decimos, por ejemplo:

> «De *A, B, C* se puede decir, en general, que $B=C$, si *A* está en la relación *p* respecto de *B* y si *A* está en la relación *p* respecto de *C*»

tenemos designado un concepto de segundo grado bajo el cual caen relaciones, y «está en la relación *p* respecto de...» representa aquí el signo de

argumento, es decir, la designación de la relación que aparece como argumento. Si establecemos la relación de igualdad, obtenemos

«De A, B, C se puede decir, en general, que $B=C$, si $A=B$ y $A=C$».

Esto es verdadero, por lo tanto la relación de igualdad cae en este concepto de segundo grado.

Así como llamamos concepto a una función con un argumento cuyo valor es siempre un valor de verdad, y así como llamamos relación a una función con dos argumentos cuyo valor es siempre un valor de verdad, así también podemos introducir una denominación para una función con tres argumentos cuyo valor es siempre un valor de verdad. Provisoriamente podemos llamar relación con tres fundamentos a esa función. A esta clase pertenecería aquélla expresada por las palabras «está entre... y...», entendiendo estas palabras como se las entendería según el uso lingüístico, si se las empleara respecto de puntos euclidianos sobre una recta euclideana. En nuestros pseudoaxiomas, sin embargo, ellas no son usadas como signos designantes, sino sólo como algo indicador, como las letras en Aritmética. Aquí no designan, pues, una relación de tres fundamentos, sino la indican solamente. Si ahora quisiéramos entender las palabras «punto» y «recta» en sentido euclideano, las palabras «está entre... y...» no deben tomarse como palabras que tienen un sentido, sino sólo como representantes de un argumento, como la letra «a» en «a^2». Pero la función cuyo argumento representan es un concepto de segundo grado bajo el cual sólo caen relaciones con tres fundamentos.

EL PENSAMIENTO. UNA INVESTIGACION LOGICA

(Contribución a *La filosofía del Idealismo alemán*, I, 1918-19, pp. 58 a 77.)

Como la palabra «bello» a la estética, y «bueno» a la ética, así «verdadero» señala su dirección a la lógica. Es cierto que todas las ciencias tienen la verdad como fin, pero la lógica se ocupa de ella de un modo totalmente diferente. Se comporta respecto de la verdad casi del mismo modo que la física respecto del peso o del calor. Descubrir verdades es misión de todas las ciencias: a la lógica le corresponde reconocer las leyes del ser verdadero. La palabra «ley» es usada en sentido doble. Cuando hablamos de leyes morales o de leyes del Estado, nos referimos a prescripciones que deben ser observadas, con las cuales los hechos no siempre están en concordancia. Las leyes naturales son lo general del acontecer natural, al que esta generalidad siempre se adecúa. Más bien en este sentido hablo de leyes del ser verdadero. Claro está que se trata aquí no de un acontecer, sino de un ser. Ahora bien, de las leyes del ser verdadero resultan prescripciones para tener algo por verdadero, para pensar, juzgar, concluir. Seguramente también en ese sentido se habla de leyes del pensamiento. Pero entonces se corre el peligro de mezclar cosas diferentes. Quizá las palabras «ley del pensamiento» se entienden de manera semejante a «ley natural», aludiendo con ello a lo general en el acontecer mental del pensamiento. En este sentido una ley del pensamiento sería una ley psicológica. Y así, se puede llegar a creer que la lógica trata del proceso mental del pensamiento y de las leyes psicológicas según las cuales éste se produce. Pero con ello se comprendería mal la misión de la lógica, pues en ella no recibiría la verdad su verdadero lugar. El error, la superstición, tienen sus causas tanto como los conocimientos correctos. El considerar verdadero lo falso y el considerar verdadero lo verdadero, ambas cosas se realizan según leyes psicológicas. Una derivación a partir de leyes psicológicas y la explicación de un proceso mental que acaba en un considerar algo verdadero, nunca pueden reemplazar a una prueba de aquello a que se refiere ese considerar verdadero. ¿No pueden haber participado en ese proceso mental también leyes lógicas? No quiero negarlo, pero cuando se trata de la verdad no puede bastar sólo la posibilidad. Posible es también que algo no lógico haya estado actuando y nos haya apartado de la verdad. Sólo después que hayamos reconocido las leyes del ser verdadero podremos resolverlo, pero entonces, cuando podamos concluir que ese considerar verdadero en el que acaba

el proceso está justificado, podremos prescindir probablemente, de la derivación y explicación del proceso mental. Para excluir el malentendido y evitar que se borre la frontera entre psicología y lógica, le asigno a ésta la tarea de encontrar las leyes del ser verdadero, no las del considerar verdadero o del pensar. En las leyes del ser verdadero se desarrolla el significado de la palabra «verdadero».

Pero ahora intentaré mostrar, a grandes rasgos, el bosquejo de aquello que en este respecto llamo verdadero. De esta manera pueden descartarse usos de la palabra que no vienen al caso. No se la usa aquí en el sentido de «sincero» o «veraz», ni tampoco como cuando se suelen tratar cuestiones de arte, cuando, por ejemplo, se habla de la verdad en el arte, cuando la verdad se declara meta del arte, cuando se habla de la verdad de una obra de arte o de sensibilidad verdadera. También se hace acompañar de la palabra «verdadero» a otra palabra para indicar que se la quiere dar a entender en su propio y no falseado sentido. También este uso queda fuera del camino aquí seguido, pues ahora se trata de aquella verdad cuyo conocimiento se le pone a la ciencia como meta.

La palabra «verdadero» aparece lingüísticamente como adjetivo. En ello se manifiesta el deseo de limitar más estrictamente el campo en que la verdad puede expresarse, donde ella entra en consideración. Se la encuentra enunciada por imágenes, proposiciones y pensamientos. Llama la atención que se den aquí juntos objetos visibles y audibles con cosas que no pueden ser percibidas con los sentidos. Esto indica que se han producido desplazamientos del sentido. En efecto. ¿Es una imagen, como simple objeto visible o tangible, propiamente verdadera? Es evidente que no se llamaría verdadera a la imagen si no hubiera en ella una intención. La imagen ha de representar algo. Tampoco la representación es en sí llamada verdadera, sino con miras a una intención: ella ha de concordar con algo. Según esto, se puede suponer que la verdad consiste en una concordancia entre una imagen y lo representado. Una concordancia es una relación. Pero ello contradice el uso de la palabra «verdadero», que no es una palabra relacionante, que no contiene ninguna indicación a otra cosa con la cual algo deba concordar. Si no sé que una imagen está representando la catedral de Colonia, tampoco sé con qué debo comparar la imagen para decidir acerca de su verdad. Así, una imagen sólo puede ser perfecta, cuando los objetos concordantes coinciden, es decir, cuando no son cosas diferentes. Se podría probar la autenticidad de un billete de banco tratando de superponerlo estereoscópicamente con uno auténtico. Pero el intento de superponer estereoscópicamente una moneda de oro con un billete de veinte marcos sería ridículo. Hacer superponer exactamente una representación y una cosa, sólo sería posible si también la cosa fuera una repre-

sentación. Y entonces, si la primera concordase con la segunda, ambas coincidirían. Pero eso es justamente lo que no se quiere, si se determina a la verdad como concordancia de una representación con algo real. Para ello es precisamente esencial que lo real sea diferente de la representación. Pero entonces no hay concordancia perfecta, verdad perfecta. Nada sería verdadero, pues lo que es verdadero a medias, no es verdadero. La verdad no admite un más o menos. ¿O acaso sí? ¿No se podría establecer que hay verdad cuando se da concordancia en algún aspecto? ¿Pero en cuál? ¿Qué deberíamos hacer para decidir si algo es verdadero? Deberíamos indagar si es verdadero que, por ejemplo, una representación y algo real concuerdan en ese aspecto establecido. Y con ello estaríamos de nuevo frente a una pregunta similar, y el juego recomenzaría una vez más. De modo que fracasa el intento de explicar la verdad como concordancia. Y fracasa también otro intento de definir el ser verdadero. Pues en una definición se proponen determinados caracteres, y al aplicarla a un determinado caso se plantearía nuevamente la cuestión de si es verdad que son esos caracteres los que corresponden. Y así nos moveríamos constantemente en círculo. Es, pues, probable que el contenido de la palabra «verdadero» sea totalmente extraordinario e indefinible.

Cuando se enuncia la verdad de una imagen no se quiere enunciar una cualidad que le corresponda a esa imagen totalmente aparte de otros objetos, sino que se tiene presente otra cosa diferente y se quiere decir que la imagen concuerda con dicha cosa. «Mi representación concuerda con la catedral de Colonia» es una proposición, y se trata ahora de la verdad de esa proposición. De modo que la tal vez abusivamente llamada verdad de imágenes y representaciones se reduce a la verdad de proposiciones. ¿A qué se llama proposición? A una sucesión de sonidos, pero sólo cuando ella tiene un sonido, con lo cual no está dicho que toda sucesión de sonidos con sentido es una proposición. Y cuando decimos que una proposición es verdadera nos referimos a su sentido. Así, aquello para lo cual lo verdadero puede entrar de algún modo en consideración, resulta ser el sentido de la proposición. Pero ¿es acaso el sentido de una proposición una representación? Sea como sea, lo verdadero no consiste en la concordancia de ese sentido con otra cosa, de lo contrario la pregunta por lo verdadero se repite hasta el infinito.

Sin querer dar una definición, llamo pensamiento a algo para lo cual la verdad puede entrar en consideración. Lo que es falso lo incluyo, por lo tanto, entre los pensamientos, tanto como lo que es verdadero[1]. Así

[1] De modo similar se ha dicho, por ejemplo, «un juicio es algo que es o verdadero o falso». Yo uso, en efecto, la palabra «pensamiento» aproximadamente en el sentido que tiene «juicio» en los escritos de los lógicos. Espero que, en lo que sigue, se comprenda por qué prefiero «pensamiento». Se ha criticado aquella explicación porque en ella habría implícita una clasificación de los juicios en ver-

puedo decir: el pensamiento es el sentido de una proposición, sin querer afirmar con ello que el sentido de toda proposición es un pensamiento. El pensamiento, en sí imperceptible, se viste con el ropaje sensible de la proposición y se nos vuelve más asible. Decimos que la proposición expresa un pensamiento.

El pensamiento es algo imperceptible, y todos los objetos perceptibles deben ser excluidos del campo en que la verdad puede entrar en consideración. La verdad no es una cualidad que corresponda a una clase especial de impresiones sensibles. Se diferencia, pues, marcadamente de cualidades como las que designamos con las palabras «rojo», «amargo», «perfumado». ¿Pero no vemos que ha salido el Sol?, ¿y con ello no vemos también que eso es verdad? Que ha salido el Sol no es un objeto que emite rayos que llegan hasta mis ojos, no es un objeto visible, como el Sol mismo. Que ha salido el Sol es reconocido como verdadero según impresiones sensibles. Sin embargo, lo verdadero no es una cualidad perceptible por los sentidos. También el magnetismo es reconocido en un objeto por medio de impresiones sensibles, si bien a esta cualidad, como a la verdad, no le corresponde una clase especial de impresiones sensibles. Si, por el contrario, encuentro verdadero que en este momento no huelo nada, eso no lo hago por medio de impresiones sensibles.

Hay que pensar, sin embargo, que no podemos reconocerle a un objeto ninguna cualidad, sin tener por verdadero el pensamiento de que ese objeto posee esa cualidad. De modo que a toda cualidad de un objeto está unida una cualidad de un pensamiento: la de la verdad. Hay que considerar también que la proposición «siento perfume de violetas» tendrá el mismo sentido que la proposición «es verdadero que siento perfume de violetas». Y no parece habérsele agregado nada a ese pensamiento por el hecho de que yo le haya adicionado la cualidad de verdad. Y sin embargo: ¿no es un gran logro cuando, después de larga vacilación y fatigosas búsquedas el investigador puede decir: «lo que yo suponía es verdadero»?El significado de la palabra verdadero parece ser muy singular. ¿No estaremos frente a algo que, salvo en el sentido corriente, no puede ser llamado cualidad? A pesar de esta duda me seguiré expresando según el uso lingüístico, como si la verdad fuese una cualidad, hasta encontrar algo más acertado.

Para distinguir más precisamente lo que llamo pensamiento, diferenciaré, además, clases de proposiciones [2]. A una proposición imperativa no

---

daderos y falsos, la cual, de todas las clasificaciones posibles de los juicios, sería la menos importante. Que junto con la explicación se dé una clasificación, no lo puedo considerar defecto lógico. En cuanto a la importancia, no será ella tan menospreciable si, como decíamos, la palabra «verdadero» señala su dirección a la lógica.

[2] La palabra «proposición» no la empleo aquí en el sentido de la gramática, que

se le ha de negar un sentido, pero ese sentido no es tal que para él la verdad pueda entrar en consideración. Por eso no llamaré pensamiento al sentido de una proposición imperativa. Hay que excluir también a las desiderativas y a las que expresan ruego. Pueden entrar en consideración proposiciones en las que comunicamos o afirmamos algo. Pero no incluyo exclamaciones en las que se desahogan sentimientos, ni gemidos, suspiros o risas, a no ser que estén por previa convención destinados a comunicar algo. ¿Pero qué ocurre con las proposiciones interrogativas? * Con una palabra interrogativa pronunciamos una proposición incompleta, que sólo adquirirá verdadero sentido con la respuesta que exigimos. Por ello, las palabras interrogativas quedan aquí fuera de cuestión. Diferente es el caso de las proposiciones interrogativas, en las que esperamos un «sí» o un «no». La respuesta «sí» dice tanto como una proposición afirmativa, pues en ella el pensamiento ya contenido en la proposición interrogativa es propuesto como verdadero. Se puede formular, entonces, una proposición interrogativa para cada proposición afirmativa. Por lo tanto, a una exclamación no se la ha de considerar información, ya que para ella no es posible formular la correspondiente proposición interrogativa. La proposición interrogativa y la proposición afirmativa contienen el mismo pensamiento, pero la proposición afirmativa contiene algo más: precisamente la afirmación. También la proposición interrogativa contiene algo más: un pedido. En una proposición afirmativa hay que distinguir, entonces, dos cosas: el contenido, que tiene en común con la proposición interrogativa, y la afirmación. Aquel es el pensamiento, o contiene, por lo menos, al pensamiento. De modo que es posible expresar un pensamiento sin proponerlo como verdadero. Estos dos momentos están tan unidos en el caso de la proposición afirmativa, que la división resulta difícil de ver. Así, pues, diferenciamos

1) el aprehender un pensamiento —el pensar,
2) el reconocimiento de la verdad de un pensamiento —el juzgar [3],
3) la manifestación de ese juicio —el afirmar.

también conoce proposiciones subordinadas. Estas, tomadas separadamente, no siempre tienen un sentido para el cual la verdad pueda entrar en consideración, mientras que sí lo tiene la articulación de la cual ellas son miembro.

* Por «proposición interrogativa» traducimos dos términos del original: *Fragesatz* y *Satzfrage*, que Frege usa en este pasaje indistintamente. La diferencia que interesa es entre estos dos términos y el de *Wortfrage*, «palabra interrogativa» *(N. de los T.)*.

[3] Me parece que hasta ahora no se ha diferenciado lo suficiente entre pensamiento y juicio. Tal vez el lenguaje induce a ello. En la proposición afirmativa no tenemos ninguna parte especial que corresponda a lo afirmado, sino que el hecho de que alguien afirme reside en la forma de la proposición afirmativa. En alemán se da la ventaja de que la proposición principal y la proposición subordinada se diferencian por su orden de palabras. Pero, a ese respecto hay que considerar que también una proposición subordinada puede contener una afirmación, y que, con frecuencia, ni la principal ni la subordinada por sí solas, sino sólo la articulación de ambas, expresa un pensamiento completo.

Cuando formulamos una proposición interrogativa ya hemos llevado a cabo la primera acción. Un progreso en la ciencia ocurre generalmente de tal manera que, en primer lugar, se aprehende un pensamiento tal como se lo podría expresar en una proposición interrogativa. Después de ello, una vez realizadas las investigaciones, ese pensamiento es reconocido como verdadero. En la forma de la proposición afirmativa expresamos el reconocimiento de la verdad. Para ello no se necesita la palabra «verdadero». Y aun cuando la usemos, el poder afirmativo no reside en ella, sino en la forma de la proposición afirmativa. Cuando ésta pierde su poder afirmativo, no puede restablecérselo la palabra «verdadero». Esto último ocurre cuando no hablamos en serio. Así como el tronar en el teatro sólo es tronar aparente, el combate teatral sólo aparente combate, así también la afirmación teatral es sólo afirmación aparente. Es sólo juego, sólo poesía. El actor en su papel no afirma, tampoco miente, aun cuando diga algo de cuya falsedad está convencido. En la poesía se da el caso de que se expresen pensamientos sin que, a pesar de la forma de la proposición afirmativa, ellos sean propuestos como verdaderos, aunque al oyente se le estimule a pronunciar un juicio aprobatorio. Entonces, también en el caso de que algo se presente bajo la forma de una proposición afirmativa, hay que preguntarse si ello contiene realmente una afirmación. Y esa pregunta se contestará negativamente si falta la necesaria seriedad. Si ha de usarse allí la palabra «verdadero», eso no tiene importancia. Así se explica que al pensamiento no se le agregue, al parecer, nada con que se le adjudique la cualidad de verdad.

Una proposición afirmativa contiene, además de un pensamiento y una afirmación, una tercera cosa a la cual no se extiende la afirmación. Ello está destinado a actuar, no pocas veces, sobre el sentimiento, sobre el estado de ánimo del oyente, o bien a estimular su imaginación. Expresiones como «desgraciadamente», «gracias a Dios», sirven a dicho propósito. Dichos componentes de la proposición son muy frecuentes en poesía, pero no están del todo ausentes en la prosa. En exposiciones matemáticas físicas o químicas son más escasas que en las históricas. Lo que llamamos ciencias del espíritu está más cerca de la poesía, pero es por ello también menos científico que las ciencias estrictas, que son tanto más rigurosas cuanto más estrictas; pues la ciencia estricta se dirige a la verdad y sólo a la verdad. Por lo tanto, todos los componentes de la proposición a los que no se extiende el poder de afirmación de ésta, no pertenecen a la exposición científica. Son, sin embargo, difíciles de evitar, a veces, aun para los que ven en ello un peligro. Cuando de lo que se trata es de aproximarse a lo inasible para el pensamiento por la vía del presentimiento, entonces hallan esos componentes su total justificación.

Cuanto más rigurosamente científica sea una exposición, menos noto-

ria será la nacionalidad del autor, más fácilmente traducible el texto. Por el contrario, los componentes del lenguaje a que me estoy refiriendo hacen muy difícil la traducción de poesías, hacen, casi siempre, incluso imposible una traducción perfecta. Pues justamente en aquello a lo que en gran parte atañe el valor poético, se diferencian más los distintos lenguajes. Que yo use la palabra «caballo» o «corcel» o «rocín» o «jamelgo», eso no produce diferencia respecto del pensamiento. El poder de afirmación no se extiende hasta aquello que diferencia estas palabras. Lo que en una poesía se puede llamar atmósfera, perfume, luminosidad, lo que se expresa mediante el tono y el ritmo, no pertenece al pensamiento. En el lenguaje hay muchos recursos para facilitar la comprensión al oyente, por ejemplo, el realce de un miembro de la proposición por medio de la entonación o del orden de palabras. Piénsese en palabras como «aún» o «ya». Con la proposición «Alfredo aún no ha llegado» se dice propiamente «Alfredo no ha llegado» y se insinúa además que se espera su llegada; pero se lo insinúa solamente. No se puede decir que el sentido de la proposición sea falso porque no se espere la llegada de Alfredo. La palabra «pero» se diferencia de «y» en que con ella se insinúa que lo que sigue está en oposición a aquello que lo que precede hace esperar. Estas señales en el habla no producen diferencia en el pensamiento. Una proposición puede ser transformada de modo que el verbo pase de la voz activa a la pasiva y el objeto directo se convierta en sujeto. También se puede hacer de un objeto indirecto un sujeto y reemplazar al mismo tiempo el verbo «dar» por «recibir». Es cierto que tales transformaciones pueden ser relevantes en otros respectos, pero no afectan al pensamiento, no afectan a nada que sea verdadero o falso. Si se reconociera universalmente la inadmisibilidad de esas transformaciones, toda investigación lógica profunda se vería impedida. Es tan importante prescindir de diferenciaciones que no afectan a lo primordial, como hacer diferenciaciones que atañen a lo esencial. Pero qué es esencial, eso depende de la finalidad. Para quien atiende la belleza del lenguaje puede parecer importante lo que para el lógico es indiferente. No pocas veces el contenido de una proposición sobrepasa al pensamiento expresado en ella. Pero también ocurre con frecuencia lo contrario: que el texto mismo que puede ser fijado por la escritura o el fonógrafo, no baste para la expresión del pensamiento. El tiempo presente se usa de dos maneras: una, para dar una indicación de tiempo; otra para suprimir toda delimitación temporal, si la atemporalidad o eternidad son componentes del pensamiento. Piénsese por ejemplo en las leyes de la matemática. De cuál de los dos casos se trata, eso no está expreso, sino que debe ser adivinado. Cuando con el presente se quiere dar una indicación de tiempo, debemos saber cuándo ha sido pronunciada la proposición para poder comprender correctamente el pensamiento. En ese

caso, el momento en que se habla es parte de la expresión del pensamiento. Si alguien quiere decir hoy lo mismo que expresó ayer usando la palabra «hoy», reemplazará esta palabra por «ayer». Aunque el pensamiento es el mismo, la expresión lingüística tiene que ser diferente para poder evitar el cambio de sentido que se produciría a causa de la diferencia de tiempo. Lo mismo se aplica a palabras como «aquí», «allá. En todos estos casos no es el texto, tal como se lo podría conservar por escrito, la expresión completa del pensamiento, sino que para su correcta comprensión se necesita también del conocimiento de ciertas circunstancias que acompañan al acto de hablar y que son utilizadas en él como medio de la expresión del pensamiento. En el mismo orden puede entrar las señales digitales, movimientos de manos, miradas. Un mismo texto que contenga la palabra «yo» puede, en boca de diferente personas expresar diferentes pensamientos; de ellos, unos pueden ser verdaderos, otros falsos.

La aparición de la palabra «yo» en una proposición da motivos a nuevas consideraciones.

Sea, pues, el siguiente caso. El Dr. Gustav Lauben dice: «yo he sido herido». Leo Peter oye esto y, después de algunos días, cuenta: «el doctor Gustav Lauben ha sido herido». Ahora bien, ¿expresa esta proposición el mismo pensamiento que el Dr. Lauben había pronunciado? Supongamos que Rudolf Lingens haya estado presente cuando habló el Dr. Lauben, y ahora oye lo que cuenta Leo Peter. Si el Dr. Lauben y Leo Peter han expresado el mismo pensamiento, entonces Rudolf Lingens —que domina perfectamente el castellano y se acuerda de lo que el Dr. Lauben dijo en su presencia— reconoce ahora inmediatamente, por la narración de Leo Peter, que se está hablando de lo mismo. Pero el conocimiento de la lengua castellana es problema aparte cuando se trata de nombres propios. Podría fácilmente ocurrir que solamente pocos relacionaran la frase «el Dr. Lauben ha sido herido» con un determinado pensamiento. En este caso, una total comprensión supone el conocimiento de los vocablos «el Dr. Gustav Lauben». Si tanto Leo Peter como Rudolf Lingens identifican al Dr. Lauben como el médico que vive en una casa conocida por ambos, donde no vive ningún otro médico, entonces los dos entienden del mismo modo la proposición «el Dr. Gustav Lauben ha sido herido», la asocian con el mismo pensamiento. Pero también es posible que Rudolf Lingens no conozca personalmente al Dr. Lauben y no sepa que es justamente el Dr. Lauben el que dijo: «yo he sido herido». En ese caso Rudolf Lingens puede no saber que se trata de la misma cosa. A ese respecto digo, por lo tanto: el pensamiento dado a conocer por Leo Peter no es el mismo que ha pronunciado el Dr. Lauben.

Sigamos suponiendo que Herbert Garner sabe que el Dr. Lauben nació

el 13 de septiembre de 1875 en N.N., y que estos datos no se aplican a ningún otro. En cambio, él no sabe ni dónde vive actualmente el doctor Lauben, ni ninguna otra cosa más acerca de él. Leo Peter, por su parte, no sabe que el Dr. Gustav Lauben nació el 13 de septiembre de 1875 en N.N. Entonces Herbert Garner y Leo Peter no hablan, en lo que respecta al nombre propio «Dr. Gustav Lauben», el mismo lenguaje, aunque efectivamente, con este nombre se refieren a la misma persona; puesto que no saben que lo están haciendo. Herbert Garner no asocia, pues, con la proposición «el Dr. Lauben ha sido herido» el mismo pensamiento que Leo Peter quiere expresar con ella. Para evitar el inconveniente de que Herbert Garner y Leo Peter no hablen el mismo lenguaje, voy a suponer que Leo Peter emplea el nombre propio «Dr. Lauben», Herbert Garner, en cambio, el nombre propio «Gustav Lauben». Así es posible que Herbert Garner considere verdadero el sentido de la proposición «el doctor Lauben ha sido herido», y que, en cambio, confundido por noticias falsas, tenga por falso el sentido de la proposición «Gustav Lauben ha sido herido». Bajo estas suposiciones los pensamientos son, pues, diferentes.

De acuerdo con esto, en un nombre propio importa cómo a través de él se da el, la o lo designado. Esto puede ocurrir de diferentes maneras, y a cada una de ellas corresponde un sentido especial para la proposición que contiene al nombre propio. Los diferentes pensamientos concuerdan, por cierto, en su valor de verdad; es decir, si uno de ellos es verdadero, todos son verdaderos, y si uno de ellos es falso, todos lo son. No obstante, hay que reconocer su diversidad. En rigor, hay que exigir que en cada nombre propio haya una sola manera de darse el, la o lo designado. A menudo es insignificante que se cumpla o no esta exigencia, pero no siempre.

Ahora bien, cada uno está dado a sí mismo de una manera particular y originaria, como no está dado para ningún otro. Por eso, cuando el Dr. Lauben piensa que ha sido herido, posiblemente lo está haciendo sobre la base de esa manera originaria con que él está dado a sí mismo. Y el pensamiento así determinado sólo lo puede aprehender él, el Dr. Lauben. Sin embargo, él quiso comunicar algo a otros. Y no puede comunicar un pensamiento que sólo él puede aprehender. Entonces, cuando dice: «yo he sido herido», tiene que usar ese «yo» en tal sentido, que sea aprehensible también para los otros, por ejemplo, en el sentido de «el que en este momento les habla», con lo cual se sirve de las circunstancias concomitantes de su hablar para la expresión del pensamiento [4].

[4] No estoy aquí en la afortunada situación de un mineralogista que muestra a sus oyentes un cristal de roca. No puedo ponerles a mis lectores un pensamiento en las manos para que lo observen con toda exactitud desde todos los ángulos. Debo contentarme con ofrecer al lector el pensamiento en sí imperceptible, envuelto en la forma lingüística perceptible. En esta tarea, la plasticidad del lenguaje crea dificultades. Lo perceptible se inmiscuye constantemente, haciendo a la ex-

Pero aquí se impone una consideración. ¿Es, en efecto, el mismo pensamiento, el que pronuncia primero aquella persona y ahora ésta? El hombre no tocado aún por la filosofía conoce inmediatamente cosas que puede ver, tocar, en suma, percibir con los sentidos, tales como árboles, piedras, casas; y está convencido de que otro hombre puede ver y tocar del mismo modo el mismo árbol, la misma piedra que él ve y toca. Es evidente que un pensamiento no pertenece a esta clase de cosas. ¿Pero puede él, a pesar de ello, presentarse a los hombres como él mismo, *igual* que un árbol?

También el hombre no filosófico se ve obligado a reconocer un mundo interior diferente del mundo exterior, un mundo de las impresiones sensibles, de las creaciones de su imaginación, de las sensaciones, de los sentimientos y estados de ánimo, un mundo de las inclinaciones, deseos y decisiones. Para acuñar una breve expresión, resumiré todo esto —exceptuando las decisiones— con la palabra «representación».

¿Pero pertenecen los pensamientos a este mundo interior? ¿Son representaciones? Decisiones, evidentemente, no son.

¿En qué se diferencian las representaciones de los objetos del mundo exterior? En primer lugar:

> Las representaciones no pueden ser vistas o tocadas, ni olidas, ni gustadas, ni oídas.

Doy un paseo con un acompañante. Veo un prado verde; tengo la impresión visual de lo verde. La tengo, pero no la veo.

> En segundo lugar: se tienen representaciones. Se tienen sensaciones, sentimientos, estados de ánimo, inclinaciones, deseos. Una representación tenida por alguien, pertenece al contenido de su conciencia.

El prado y las ranas en él, el Sol que lo ilumina, están allí, es lo mismo si los miro o no; pero la impresión sensible de lo verde que yo tengo existe sólo a través de mí; yo soy su portador. Nos parece absurdo que un dolor, un estado de ánimo, un deseo anden independientemente por el mundo, sin un portador. Una sensación es imposible sin alguien que la experimente. El mundo interior tiene como supuesto a uno, del que él es mundo interior.

---

presión plástica y con ello impropia. De este modo surge una lucha con el lenguaje y me veo obligado a dedicarme más a él, aunque esa no es propiamente mi misión. Espero haber conseguido hacer claro a mis lectores a qué quiero yo llamar pensamiento.

> En tercer lugar: las representaciones necesitan de un portador. Los objetos del mundo exterior son, en comparación con ellas, independientes.

Mi acompañante y yo estamos convencidos de que los dos vemos el mismo prado; pero cada uno de nosotros tiene una particular impresión sensible de lo verde. Diviso una fresa entre las hojas verdes. Mi acompañante no la encuentra; es daltoniano. La impresión de color que él recibe de la fresa no se diferencia notablemente de la que recibe de sus hojas. ¿Ve mi acompañante roja la hoja verde o ve verde la fresa roja? ¿O ve ambas de un color que yo no conozco? Son preguntas sin respuesta, o más propiamente, preguntas sin sentido. Pues la palabra «rojo», si es que no da cuenta de una cualidad de los objetos, sino caracteriza impresiones sensibles pertenecientes a mi conciencia, es, entonces, aplicable sólo en el campo de mi conciencia, ya que es imposible comparar mi impresión sensible con la de otro. Para ello sería necesario unir en una conciencia una impresión sensible perteneciente a una conciencia y una impresión sensible perteneciente a otra conciencia. Pero aun cuando fuera posible hacer desaparecer una representación de una conciencia, y al mismo tiempo hacer surgir una representación en otra conciencia, siempre quedaría sin respuesta la pregunta de si se trata de la misma representación. El ser contenido de mi conciencia pertenece de tal modo a la esencia de cada una de mis representaciones, que toda representación de otro, justamente como tal, es diferente de la mía. ¿Pero no sería posible que mis representaciones, todo el contenido de mi conciencia, fuera al mismo tiempo contenido de una más amplia, de una conciencia divina, por ejemplo? Por cierto que sí, pero sólo si yo mismo fuera parte de la esencia divina. Pero entonces, ¿serían efectivamente, representaciones mías?, ¿Sería yo su portador? Eso supera en tal medida los límites del conocer humano, que nos está permitido dejar fuera de consideración esa posibilidad. En todo caso, a los hombres nos es imposible comparar representaciones de otro con las nuestras. Corto la fresa; la tengo entre mis dedos. Ahora la ve también mi acompañante: la misma fresa. Pero cada uno de nosotros tiene su propia representación. Ningún otro tiene mi representación, pero muchos pueden ver el mismo objeto. Ningún otro tiene mi dolor. Alguien puede apiadarse de mí, pero entonces mi dolor me pertenece siempre a mí y su piedad a él. El no tiene mi dolor y yo no tengo su piedad.

> En cuarto lugar: cada representación tiene un solo portador; dos personas no tienen la misma representación.

De lo contrario ella tendría existencia independientemente de éste e

independientemente de aquél. ¿Es aqul tilo representación mía? Al usar yo en esta pregunta la expresión «aquel tilo», en rigor me estoy adelantando a la respuesta, pues con esa expresión quiero señalar algo que yo veo y que también otros pueden contemplar y tocar. Hay dos posibilidades. Si he logrado mi propósito, si con la expresión «aquel tilo» me refiero a algo, entonces el pensamiento expresado en la proposición «aquel tilo es representación mía» debe, sin duda, ser negado. Pero si no he alcanzado mi próposito, si pretendo ver sin ver realmente; si, en consecuencia, la referencia «aquel tilo» está vacía, entonces me he extraviado, sin saberlo y sin quererlo, en la región de la poesía. Así, pues, ni el contenido de la proposición «aquel tilo es representación mía», ni el de la proposición «aquel tilo no es representación mía» es verdadero, pues en los dos casos tengo un enunciado al cual falta el objeto. La respuesta a la pregunta puede así ser rechazada con el fundamento de que el contenido de la proposición «aquel tilo es representación mía» es poesía. Tengo, sí, una representación, pero no me refiero a ella con las palabras «aquel tilo». Alguien podría referirse, realmente, con las palabras «aquel tilo» a alguna de sus representaciones; él sería, entonces, portador de aquello a que quiso referirse con esas palabras, pero en ese caso no estaría viendo aquel tilo, ni ningún otro lo vería ni sería su portador.

Vuelvo ahora a la pregunta: ¿es el pensamiento una representación? Si el pensamiento que pronuncio en el teorema de Pitágoras puede ser reconocido como verdadero tanto por otros como por mí, no pertenece, entonces, al contenido de mi conciencia, no soy yo, por consiguiente, su portador y, sin embargo, puedo reconocerlo como verdadero. Pero si no es el mismo pensamiento, el que yo o aquel otro consideramos contenido del teorema de Pitágoras, entonces no se debería decir, en rigor, «el teorema de Pitágoras» sino «mi teorema de Pitágoras» o «su teorema de Pitágoras», y ellos serían diferentes, pues el sentido pertenece necesariamente a la proposición. Así mi pensamiento puede ser contenido de mi conciencia, el de él, de su conciencia. ¿Podría ser, entonces, verdadero el *sentido* de mi teorema de Pitágoras, el de él falso? He dicho que la palabra «rojo» es aplicable sólo en el ámbito de mi conciencia, si es que no da cuenta de una cualidad de los objetos, sino caracteriza algunas de mis impresiones sensibles. Así podrían también palabras como «verdadero» y «falso», tal como ya las entiendo, ser aplicable sólo en el ámbito de mi conciencia, si no se refirieran a algo de lo cual yo soy portador y en cambio estuvieran destinadas a caracterizar de algún modo contenidos de mi conciencia. Entonces la verdad estaría limitada al contenido de mi conciencia, y sería dudoso que algo similar pudiera ocurrir en la conciencia de otro.

Si cada pensamiento necesita de un portador, a cuyos contenidos de

conciencia pertenece, entonces sólo es pensamiento de ese portador, y no hay una ciencia común a muchos, en la que muchos puedan trabajar, sino que yo tengo tal vez mi ciencia, es decir, un conjunto de pensamientos de los que soy portador y otro tiene su ciencia. Cada uno se ocupa con contenidos de su conciencia. Una contradicción entre ambas ciencias no es, pues, posible. Y en rigor es ocioso discutir sobre la verdad; tan ocioso —casi diría ridículo— como que dos personas discutieran sobre si un billete de cien marcos es auténtico, refiriéndose ambas al billete que cada una tiene en su bolsillo y entendiendo la palabra «auténtico» en un sentido particular para cada uno. Si alguien considera a los pensamientos representaciones, es, entonces, aquello que él reconoce como verdadero y según su opinión, contenido de su conciencia, y en rigor no incumbe a los otros. Y si él oyera de mí la opinión de que el pensamiento no es representación, no lo podría poner en duda, pues en este caso tampoco le incumbiría. Así, pues, el resultado parece ser: los pensamientos no son ni objetos del mundo exterior ni representaciones.

Hay que considerar una tercera esfera. Lo que a ella pertenece coincide con las representaciones en que no puede ser percibida con los sentidos, y con los objetos, en que no necesita de un portador a cuyos contenidos de conciencia pertenezca. Así, por ejemplo, el pensamiento que pronunciamos en el teorema de Pitágoras es atemporalmente verdadero, es verdadero independientemente de si alguien lo considera verdadero. No necesita de un portador. Es verdadero no solamente desde que ha sido descubierto, así como un planeta ya ha estado en acción recíproca con otros planetas aun antes de que alguien lo haya visto [5].

Pero me parece oír una curiosa objeción. He admitido varias veces, que el mismo objeto que yo veo pueda ser contemplado también por otro. ¿Pero cómo, si todo fuera sólo un sueño? Si yo soñara solamente mi paseo con mi acompañante, si yo soñara, sólo, que mi acompañante ve, como yo, el verde prado, si todo eso no fuera más que un espectáculo montado en el escenario de mi conciencia, entonces sería dudoso que hubiese objetos del mundo exterior. Quizá el reino de los objetos está vacío, y no veo objetos, tampoco seres humanos, sino tengo sólo tal vez representaciones cuyo portador soy yo mismo. Algo que, así como mi cansancio, no puede existir independientemente de mí: una representación, no puede ser una persona, no puede contemplar conmigo el mismo prado, no puede ver la fresa que yo sostengo en mi mano. Que yo, en lugar de todo el mundo circundante en el que creo moverme y actuar, tenga sólo mi mundo

[5] Se ve un objeto, se tiene una representación, se aprehende o se piensa un pensamiento. Cuando se aprehende o se piensa un pensamiento no se lo crea, se entra en relación con él, que ya existía antes, de una cierta manera, que es diferente de la de ver un objeto o tener una representación.

interior, es del todo imposible de creer. Y, sin embargo, es la consecuencia inevitable de la proposición de que sólo el objeto de mi representación puede ser lo que es mi representación. ¿Qué se seguiría de esta proposición si ella fuera verdadera? ¿Habría otros seres humanos? Eso sería, sí, posible, pero yo no sabría nada de ellos: pues un ser humano no puede ser representación mía, y, por consiguiente —si nuestra proposición es verdadera— tampoco objeto de mi contemplación. Y así pierden fundamento todas aquellas consideraciones por las cuales admití que algo pudiera ser objeto para otro, tanto como para mí, pues aun cuando ello ocurriera, yo no lo sabría. Para mí sería imposible distinguir aquello de lo que soy portador, de aquello de lo que no soy portador. Al juzgar que algo no era representación mía, lo hice objeto de mi pensamiento, y con ello representación mía. En esta interpretación ¿hay un prado verde? Quizá, pero no sería visible para mí. Pues si un prado no es representación mía, no puede —de acuerdo con nuestra proposición— ser objeto de mi contemplación. Pero si el prado es representación mía, entonces es invisible, pues las representaciones no son visibles. Puedo tener, por cierto, la representación de un prado verde, pero entonces él no es verde, pues representaciones verdes no hay. ¿Hay, según esto, una bala de cien kilogramos de peso? Tal vez, pero yo no podría saber nada de ella. Si una bala no es representación mía, no puede, según nuestra proposición, ser objeto de mi contemplación, de mi pensamiento. Pero si una bala fuera representación mía, no tendría peso. Puedo tener la representación de una bala pesada. Aquélla contendría, entonces, como una parte, la representación del peso. Esta parte, sin embargo, no es cualidad de la representación total, en la misma medida en que Alemania no es una cualidad de Europa. Así resulta que:

O bien es falsa la proposición de que sólo el objeto de mi contemplación puede ser lo que es mi representación, o bien todo mi saber y mi conocer se limitan al campo de mis representaciones, al escenario de mi conciencia. En este caso tendría yo solamente un mundo interior y nada sabría de los otros seres humanos.

Es notable cómo en estas consideraciones los opuestos se cambian los unos en los otros. Sea, por ejemplo, el caso de un fisiólogo del aparato sensorial. Como conviene a un investigador de las ciencias naturales, él está muy lejos de considerar sensaciones suyas los objetos que está convencido de ver y tocar. Por el contrario, cree tener en las impresiones sensibles las más seguras pruebas de los objetos, que existen totalmente independiente de su sentimiento, representaciones y pensamientos, y que no necesitan de su conciencia. Tampoco reconoce a las fibras nerviosas y células ganglionares como contenidos de su conciencia, que antes se inclina a ver a su conciencia dependiendo justamente de fibras nerviosas

y células ganglionares. El observa que los rayos de luz al penetrar en el ojo entran en contacto con los nervios oculares y allí operan una transformación, una excitación. Parte de ella es conducida a través de fibras nerviosas hasta células ganglionares. A ello se suman, seguramente, otros procesos en el sistema nervioso y surgen sensaciones de color; y éstas se unen a aquello que llamamos, tal vez, representación de un árbol. Entre el árbol y mi representación se interponen procesos físicos, químicos, fisiológicos. Pero con mi conciencia se relacionan sólo, según parece, procesos en mi sistema nervioso, y cada observador del árbol tiene sus propios procesos en su propio sistema nervioso. Ahora bien, los rayos de luz pueden haber sido reflejados por un espejo antes de haber penetrado en mis ojos, y así se proyectan como si hubieran salido de un lugar detrás del espejo. Los efectos sobre los nervios ópticos y todo lo que sigue, ocurrirá como ocurriría si los rayos de luz hubieran salido de un árbol detrás del espejo, y se hubieran multiplicado sin obstáculo hasta llegar al ojo. Y así se realizará una representación de un árbol sin que haya tal árbol. Por difracción de la luz puede surgir, con la mediación del ojo y del sistema nervioso, una representación que no corresponde absolutamente a nada. Pero la excitación del nervio óptico ni siquiera necesita de luz para producirse. Si en nuestra cercanía cae un rayo, creemos ver llamas, aun cuando no podamos ver el rayo mismo. En tal caso, el nervio óptico es excitado por algo así como corrientes eléctricas que se producen en nuestro cuerpo como consecuencia del rayo. Si el nervio óptico es de este modo excitado en la misma medida en que lo sería por rayos de luz que parten de llamas, entonces creemos ver llamas. Depende, pues, precisamente, de la excitación de los nervios ópticos, de qué modo ella se realice, da lo mismo. Podemos dar un paso más adelante. En rigor esta excitación del nervio óptico no se da de manera inmediata, eso es sólo suposición. Creemos que un objeto independiente de nosotros excita un nervio y mediante ello produce una impresión sensible, pero en realidad experimentamos de ese proceso sólo el último paso, que penetra en nuestra conciencia. Esa impresión sensible, esa sensación que reducimos a la excitación de un nervio, ¿no podría tener también otras causas, ya que también la misma excitación del nervio puede ocurrir de manera diferente? Si lo que pertenece a nuestra conciencia llamamos representación, en rigor experimentamos sólo representaciones, pero no sus causas. Y si el investigador quiere apartar toda pura conjetura, no le quedan sino representaciones, todo se le reduce a representaciones, también los rayos de luz, las fibras nerviosas y las células ganglionares, de las cuales había partido. Y así termina destruyendo los fundamentos de su propia construcción. ¿Es todo sensación? Todo necesita un portador, sin el cual no tiene existencia. Me he considerado portador de mis representaciones, pero, ¿no

soy yo mismo una representación? Es como si yaciera en un sofá, como si viera las puntas de un par de botas lustradas, la parte anterior de unos pantalones, un chaleco, parte de una chaqueta: especialmente las mangas, dos manos, pelos de una barba, trazos borrosos de una nariz. ¿Y esa unión de impresiones visuales, ese conjunto de representaciones soy yo mismo? Me parece ver allí también una silla. Es una representación. En rigor yo no difiero mucho de ella, pues acaso ¿no soy yo también una unión de impresiones sensibles, una representación? Pero ¿dónde está entonces, el portador de estas representaciones? ¿Cómo he llegado a escoger una de esas representaciones y a proponerla como portadora de las otras? ¿Por qué ha de ser esa la representación que yo he dado en llamar *yo?* ¿No podría elegir para ello del mismo modo la representación que estoy tratando de llamar silla? Y en todo caso, ¿para qué, pues, un portador de las representaciones? Algo tal sería siempre esencialmente distinto de las representaciones de que es portador, sería algo independiente, que no necesita de ningún portador extraño a él. Si todo es representación, entonces no hay ningún portador de las representaciones. Y recíprocamente: si no hay un portador de las representaciones, tampoco hay representaciones, pues éstas necesitan de un portador sin el cual no pueden existir. No habiendo señor, tampoco habrá subditos. La dependencia que yo me había inclinado a concederle a la sensación respecto del que la siente, desaparece al no haber más portador. Lo que he llamado representaciones son, entonces, objetos independientes. Para adjudicarle un lugar especial al objeto que llamé *yo* carezco de todo fundamento.

¿Pero es posible eso? ¿Puede haber una experiencia sin alguien que la experimente? ¿Qué sería este gran espectáculo sin un espectador? ¿Puede existir un dolor sin alguien que lo tenga? El ser sentido es condición necesaria del dolor, y condición del ser sentido es, a su vez, alguien que sienta. Pero entonces hay algo que no es representación mía y sí puede ser objeto de mi contemplación, de mi pensamiento, y yo soy algo de esa suerte. ¿O puedo yo ser parte del contenido de mi conciencia, mientras otra parte es, por ejemplo, una representación de la Luna? ¿Ocuriría tal vez eso cuando juzgo que contemplo la Luna? Entonces esta primera parte tendría una conciencia, y una parte del contenido de esta conciencia sería nuevamente yo. Y así sucesivamente. Pero que yo esté encastillado en mí mismo hasta lo infinito, eso es impensable, pues entonces no habría sólo un yo, sino infinitos. Yo no soy mi propia representación, y si afirmo algo de mí, por ejemplo, que en este momento no siento ningún dolor, entonces mi juicio se refiere a algo que no es contenido de mi conciencia, que no es mi representación, es decir: a mí mismo. De modo que aquello, de lo cual yo declaro algo, no es necesariamente representación mía. Sin embargo, podría objetarse: si pienso que yo en este

momento no tengo ningún dolor, ¿no corresponde acaso a la palabra *yo* algo del contenido de mi conciencia? ¿Y no es eso una representación? Es muy posible. Una cierta representación puede estar relacionada en mi conciencia con la representación de la palabra *yo*. Pero ella es, entonces, una representación junto a las otras representaciones, y yo soy portador de ella como de las otras representaciones. Tengo una representación de mí, pero yo no soy esa representación. Hay que diferenciar rigurosamente aquello que es contenido de mi conciencia, mi representación, y aquello que es objeto de mi pensamiento. Así es, pues, falsa la proposición de que sólo puede ser objeto de mi contemplación, de mi pensamiento, lo que pertenece al contenido de mi conciencia.

Ahora está el camino libre para que pueda reconocer a otro como portador independiente de representaciones. Tengo una representación de él, pero no confundo a ésta con él mismo. Y si enuncio algo acerca de mi hermano, no enuncio nada de la representación que tengo de él. El enfermo que tiene un dolor es portador de ese dolor, pero el médico que lo atiende, que reflexiona acerca de las causas de ese dolor, no es portador de ese dolor. No pretende que, anestesiándose él, podrá amortiguar el dolor del enfermo. Una representación en la conciencia del médico puede, por cierto, corresponder al dolor del enfermo, pero ella no es el dolor ni lo que el médico quiere calmar. Si el médico hace venir a otro médico, entonces hay que diferenciar: primero, el dolor del cual el enfermo es portador; segundo, la representación de ese dolor que tiene el primer médico, y tercero, la representación del dolor que tiene el segundo médico. Esta pertenece, claro está, al contenido de la conciencia del segundo médico, pero no es objeto de su reflexión; quizá sí medio auxiliar para la reflexión, como podría serlo también, por ejemplo, un dibujo. Ambos médicos tienen como objeto común el dolor del enfermo, del cual no son portadores. De allí se puede ver que no sólo una cosa, sino también una representación puede ser objeto común del pensamiento de personas que no tienen esa representación.

Así, pienso, el problema se vuelve inteligible. Si el hombre no pudiera tomar como objeto su pensamiento ni pensar algo de lo cual él no es portador, tendría, tal vez un mundo interior, no un mundo exterior. ¿Pero esto no se basará en un error? Estoy convencido de que a la representación que yo relaciono con las palabras «mi hermano» corresponde algo que no es mi representación, y de lo cual puedo enunciar algo. ¿Pero no me estaré equivocando con ello? Tales errores ocurren con frecuencia. Caemos entonces, contra nuestro propósito, en la poesía. ¡En efecto! Con el paso por el cual conquisto para mí un mundo exterior, me expongo al peligro del error. Y aquí doy con una nueva diferencia de mi mundo interior respecto del mundo exterior. Que tengo la impresión visual de lo verde, no

lo puedo poner en duda; que veo una hoja de tilo, en cambio, no es tan seguro. Así encontramos en el mundo interior, en oposición a opiniones muy difundidas, seguridad, mientras que en nuestras excursiones al mundo exterior nunca nos abandona del todo la duda. No obstante, también aquí la verosimilitud es en muchos casos apenas diferenciable de la certeza, de modo que podemos aventurarnos a juzgar acerca de los objetos del mundo exterior. Y debemos arriesgarnos a eso, aun contando con el peligro del error, si no queremos exponernos a peligros aún mayores.

Como resultado de las últimas consideraciones concluyo lo siguiente: no es representación todo lo que puede ser objeto de mi conocimiento. Yo mismo, portador de representaciones, no soy una representación. No hay ahora ningún obstáculo para reconocer a otros como portadores de representaciones, igual que a mí mismo. Y una vez que se ha dado la posibilidad, la verosimilitud es muy grande, tan grande que ya no se diferencia, para mi comprensión, de la certeza. ¿Habría, si no, una ciencia de la Historia? ¿No perecería, de lo contrario toda teoría del deber, todo derecho? ¿Qué quedaría de la religión? También las ciencias naturales podrían ser apreciadas sólo como poesía, similares a la Astrología y a la Alquimia. De modo que las consideraciones que he hecho bajo el supuesto de que hay otros hombres, además de mí, que pueden hacer de las mismas cosas que yo objetos de su contemplación, de su pensamiento, en lo esencial se mantienen en vigor.

No todo es representación. Así es que yo puedo reconocer como independiente de mí, también al pensamiento que otros, igual que yo, pueden aprehender. No somos portadores de los pensamientos como lo somos de nuestras representaciones. No tenemos un pensamiento como tenemos una impresión sensible; pero tampoco vemos un pensamiento, como sí vemos una estrella. Por eso sería aconsejable elegir aquí una expresión especial, y para ello se nos ofrece aquí la palabra «aprehender»[6]. La aprehensión de un pensamiento supone una capacidad mental especial: el intelecto. Al pensar no producimos los pensamientos, sino que los aprehendemos. Pues lo que he llamado pensamiento está en estrecha relación con la verdad. De lo que reconozco como verdadero, de ello juzgo yo que es verdadero independientemente de mi reconocimiento de verdad, e independientemente también de si pienso o no en ello. Lo verdadero de un pensamiento no tiene nada que ver con que se lo piense. «¡Hechos! ¡Hechos! ¡Hechos!», exclama el investigador de la naturaleza cuando quiere insistir en la necesidad de un fundamento seguro para la ciencia. ¿Qué es un hecho?

[6] La expresión "aprehender" es tan ilustrativa como "contenido de conciencia". La esencia del lenguaje, justamente, no lo podría permitir de otra manera. Lo que tengo en mi mano puede ser considerado contenido de ella; pero es contenido de la mano de manera completamente distinta y mucho más extraño a ella que los huesos, que los músculos de que ella se compone y que sus tensiones.

Un hecho es un pensamiento que es verdadero. Pero el investigador de la naturaleza no va a aceptar como fundamento seguro de la ciencia algo que dependa de los cambiantes estados de conciencia de los hombres. La tarea de la ciencia no consiste en un crear, sino en un descubrir pensamientos verdaderos. El astrónomo puede aplicar una verdad matemática al investigar acontecimientos pasados hace ya tiempo y que tuvieron lugar cuando, al menos en la Tierra, nadie aún había reconocido esa verdad. Y lo puede porque la verdad de un pensamiento es atemporal. De modo que aquella verdad no pudo haber surgido sólo con su descubrimiento.

No todo es representación. Pues si no la Psicología contendría en sí a todas las ciencias o sería, por lo menos, juez supremo sobre todas las ciencias. Pues si no la Psicología dominaría también sobre la Lógica y la matemática. Y no habría mayor desconocimiento de la matemática que el subordinarla a la Psicología. Ni la Lógica ni la matemática tienen por tarea estudiar las almas y el contenido de conciencia cuyo portador es el hombre individual. Antes bien, sería, quizá, posible establecer como misión de ellas el estudio del espíritu; del espíritu, no de los espíritus.

La aprehensión del pensamiento supone a alguien que aprehende, que piensa. Este es, entonces, portador del pensar, no del pensamiento. Aunque el pensamiento no pertenece al contenido de la conciencia del que lo piensa, algo de ésta debe, sin embargo, apuntar al pensamiento. Pero esto no debe ser confundido con el pensamiento mismo. Así también es Algol diferente de la representación que alguien tiene de Algol.

El pensamiento no se ordena —ni como representación de mi mundo interior, ni tampoco del exterior— en el mundo de los objetos perceptibles por los sentidos.

Esta conclusión, por más que ella surja con evidencia de lo expuesto, no ha de ser, tal vez, aceptada sin resistencia. A muchos les parecerá imposible, pienso, adquirir información sobre algo que no pertenece a su mundo interior, no siendo por medio de la percepción sensible. De hecho ésta es frecuentemente considerada la más segura, incluso la única, fuente de conocimiento para todo aquello que no pertenece al mundo interior. ¿Pero con qué derecho? Componente esencial de la percepción sensible es la impresión sensible, y ésta es parte del mundo interior. Dos hombres, empero, no tienen la misma impresión sensible, aunque la de ambos pueda ser semejante. Las impresiones sensibles, ellas solas, no nos abren el mundo exterior. Quizá exista un ser que sólo tiene impresiones sensibles sin ver o tocar objetos. El tener impresiones visuales no significa aún ver objetos.

¿Cómo es que veo el árbol allí donde lo veo? Evidentemente eso se debe a las impresiones visuales que tengo y a la índole particular de

aquellas que se producen por el hecho de ver yo con dos ojos. En cada una de los dos retinas surge, hablando en términos de física, una imagen particular. Otro ve el árbol en el mismo lugar. También él tiene dos retinas, pero que difieren de las mías. Debemos admitir que esas imágenes retinales son determinantes de nuestras impresiones. Según ello, no sólo no tenemos las mismas impresiones visuales, sino que éstas difieren notablemente unas de otras. Y, sin embargo, nos movemos en el mismo mundo exterior. Ocurre, pues, que el tener impresiones visuales es necesario para ver los objetos, pero no suficiente. Lo que además de eso se requiere no es nada que se refiera a los sentidos. Y es eso justamente lo que nos abre el mundo exterior, pues sin ello quedaría cada uno encerrado en su mundo interior. Puesto que lo decisivo es algo no sensible, ello podría, aun allí donde las impresiones sensibles no tienen efecto, conducirnos fuera de nuestro mundo interior y hacernos aprehender pensamientos. Además de su mundo interior, debería uno diferenciar el mundo exterior propiamente dicho, el de los objetos perceptibles por los sentidos, y el dominio de aquello que no es perceptible por los sentidos. Para reconocer ambos dominios necesitamos de algo no sensible, pero para la percepción sensible de los objetos necesitaríamos además impresiones sensibles, y éstas pertenecen totalmente al mundo interior. Así, aquello en que se sustenta la diferencia del ser dado de una cosa y el de un pensamiento, es algo no atribuible a alguno de aquellos dos dominios, sino al mundo interior. De modo que no puedo considerar tan grande a esa diferencia, que por ella llegue a ser imposible el ser dado de un pensamiento no perteneciente al mundo interior.

Un pensamiento, ciertamente, no es algo a lo que habitualmente se llame actual *. El mundo de lo actual es un mundo en el que esto actúa sobre aquello, lo cambia y a su vez experimenta una reacción, por la cual él mismo es cambiado. Y todo ello es un acontecer en el tiempo. A lo que es atemporal y no cambiable, mal podremos reconocerlo como actual. Ahora bien ¿es el pensamiento cambiable o es él atemporal? El que pronunciamos en el teorema de Pitágoras es, por cierto, atemporal, eterno, no cambiable. ¿Pero no hay también pensamientos que hoy son verdaderos, pero después de medio año falsos? Por ejemplo, ¿el pensamiento de que aquel árbol tiene follaje verde, es, después de medio año, falso? No, porque no es el mismo pensamiento. El texto sólo «este árbol es verde» no alcanza para expresarlo, pues el momento de la enunciación pertenece también a él. Sin la determinación temporal que se da a través de él no

* Para la palabra alemana *wirklich* preferimos en este caso la versión española «actual» antes que, por ejemplo, «real», para mantenernos así más cerca del original. Este reúne intencionalmente en este pasaje términos derivados de la raíz *wirk-* (*wirklich*, «actual»; *wirkt*, «actúa»; *Gegenwirkung*, «reacción»), a la que traduce con bastante aproximación la latina *act-/acc-* (*N. de los T.*).

tendríamos pensamiento completo, es decir, no tendríamos absolutamente tal pensamiento. Sólo una proposición que contenga una determinación temporal y que sea en todo aspecto completa, puede expresar un pensamiento. Pero éste, si es verdadero, no lo es hoy o mañana, es atemporalmente verdadero. El *presente* de «es verdadero» no se refiere al momento en que es dicho, sino es, si se me permite la expresión, un tiempo de la atemporalidad. Si usamos la pura forma de la proposición afirmativa, evitando la palabra «verdadero», hay, pues, que distinguir dos cosas: la expresión del pensamiento y la afirmación. La determinación temporal contenida de algún modo en la proposición pertenece sólo a la expresión del pensamiento; mientras que la verdad, cuyo reconocimiento reside en la forma de la proposición afirmativa, es atemporal. Es cierto que el mismo texto puede, con el tiempo, debido a la mutabilidad del lenguaje, adquirir otro sentido, expresar otro pensamiento; pero entonces la mutación se refiere a lo lingüístico. Claro, pues, ¿qué valor podría tener para nosotros lo eternamente inmutable, que no ejerce una acción sobre nosotros ni experimenta, a su vez reacción? Algo totalmente, y en todo aspecto, no actuante sería también no actual (no real) y para nosotros no existente. Aun lo atemporal debe estar de algún modo implicado con la temporalidad, para que pueda ser algo para nosotros. ¿Qué sería para mí un pensamiento que nunca fue aprehendido por mí? En cambio, al aprehender un pensamiento, entro yo en relación con él y él conmigo. Es posible que el mismo pensamiento que hoy es pensado por mí, ayer no haya sido pensado por mí. Con esto queda, pues, excluida la estricta atemporalidad del pensamiento. Pero alguno se sentirá inclinado a distinguir entre cualidades esenciales e inesenciales, y a reconocer algo como atemporal si las mutaciones que sufre sólo afectan sus cualidades no esenciales. No esencial se llamará a una cualidad de un pensamiento, la cual consiste o se deriva de que ese pensamiento sea aprehendido por un [sujeto] pensante.

¿Cómo actúa un pensamiento? Siendo aprehendido y tenido por verdadero. Es un proceso en el mundo interior de un [sujeto] pensante y que puede tener posteriores consecuencias en ese mundo interior, las cuales, al extenderse al terreno de la voluntad, se hacen notorias también en el mundo exterior. Así, por ejemplo, si aprehendo el pensamiento que pronunciamos en el teorema de Pitágoras, las consecuencias pueden ser: que lo reconozca como verdadero, y luego, que lo aplique sacando una conclusión que se refiera a la aceleración de masas. De modo que nuestras acciones están preparadas por el pensar y el juzgar. Y así, un pensamiento puede tener influencia mediata sobre movimientos de masa. El actuar de un ser humano sobre otro está casi siempre posibilitado por el pensamiento. Se comunica un pensamiento. ¿Cómo ocurre eso? Uno produce

transformaciones en el mundo exterior, que al ser percibidas por los otros, los ponen en la situación de aprehender un pensamiento y considerarlo verdadero. Los grandes acontecimientos de la historia del mundo, ¿pudieron realizarse de otra manera que por la comunicación de pensamientos? Y, sin embargo, tendemos a considerar a los pensamientos como no actuales, porque ellos parecen inactivos en los procesos; cuando, en verdad, el pensar, juzgar, manifestar, comprender: todo hacer, es cosa de los hombres. ¡Cuán de otro modo parece actual un martillo, comparado con un pensamiento! ¡Cuán otro es el proceso de tomar un martillo que el de comunicar un pensamiento! El martillo pasa del dominio de uno al de otro, es tomado, experimenta una presión, con ello su densidad, su contextura se altera parcialmente. Con el pensamiento, en cambio, no ocurre nada de ello. Al ser comunicado, el pensamiento no abandona el dominio del que lo comunica, pues en rigor, el hombre no tiene ningún poder sobre él. Al ser aprehendido, provoca transformaciones en principio sólo en el mundo interior del que lo aprehende, pero en lo esencial permanece inalterado, pues las transformaciones que sufre afectan sólo a cualidades no esenciales. Falta aquí lo que siempre reconocemos en el acontecer natural: la acción recíproca. Los pensamientos no son del todo inactuales, pero su actualidad es de otra índole que la de los objetos. Y su actuar es desencadenado por un hacer del sujeto pensante, sin el cual —al menos en la medida en que nos es posible verlo— serían inefectivos. Y, sin embargo el sujeto pensante no los crea, sino que debe tomarlos tal como son. Pueden ser verdaderos sin ser aprehendidos por un sujeto pensante, y aun así no son del todo inefectivos, al menos si son aprehendidos y puestos en acción.

LA NEGACION. UNA INVESTIGACION LOGICA

(Contribución a *La filosofía del Idealismo alemán*, I, 1918-19, págs. 143 a 157.)

Una proposición interrogativa contiene el pedido de reconocer un pensamiento como verdadero o de rechazarlo como falso. Para poder responder a ese pedido, se requiere que el texto de la pregunta del pensamiento en cuestión sea comprensible sin ninguna duda, y también que el pensamiento no pertenezca a la poesía. En lo que sigue doy siempre estas dos condiciones por cumplidas. La respuesta a una pregunta [1] es una afirmación basada en un juicio, tanto si la pregunta es respondida afirmativamente, como si es negada.

Pero aquí surge una consideración. Si el ser de un pensamiento es su ser verdadero, la expresión «pensamiento falso», es entonces tan contradictoria como la expresión «pensamiento que no es»; y la expresión «el pensamiento de que tres es mayor que cinco» es, por consiguiente, vacía y no puede, por ello, ser usada en la ciencia —salvo entre comillas. No se puede decir, pues, «que tres es mayor que cinco es falso», porque el sujeto gramatical está vacío.

¿Pero no se puede, por lo menos, preguntar si algo es verdadero?

En una pregunta se pueden distinguir el pedido de juzgar y el contenido particular de la pregunta que debe ser juzgado. En lo sucesivo llamaré a este contenido particular, simplemente, contenido de la pregunta o sentido de la correspondiente proposición interrogativa. Ahora bien, ¿tiene la proposición interrogativa

«¿es tres mayor que cinco?»

un sentido, si el ser de un pensamiento consiste en su ser verdadero? Un pensamiento no puede, entonces, ser contenido de la pregunta, y nos inclinaríamos a decir que la proposición interrogativa no tiene ningún sentido. Pero eso podría provenir de que hemos reconocido de inmediato la falsedad. ¿Tiene, entonces sentido la proposición interrogativa siguiente?

$$\text{«¿Es } \left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ mayor que } \sqrt[10]{10^{21}}\text{?»}$$

[1] Aquí, y en adelante, cuando escribo simplemente «pregunta», me refiero siempre a proposición interrogativa.

Si se hubiera llegado al resultado de tener que responder afirmativamente, podría aceptarse que la proposición interrogativa tiene un sentido, ya que tendría, como sentido, un pensamiento. Pero ¿y si hubiera habido que negarla? Según nuestro supuesto, ella no tiene un pensamiento como sentido. Sin embargo, algún sentido tiene que tener la proposición interrogativa, si es que ella contiene una pregunta. ¿Acaso no se pregunta en ella por algo?¿No se puede estar deseando obtener una respuesta a ello? En ese caso depende de la respuesta el que se acepte como pensamiento el contenido de la pregunta. Pero entonces el sentido de la proposición interrogativa debe ser aprehensible antes de ser respondida, de lo contrario ninguna respuesta sería posible. Así pues, lo que antes de la respuesta es aprehensible como sentido de la pregunta —y sólo esto puede ser llamado sentido de la proposición interrogativa— no puede ser un pensamiento, si el ser de un pensamiento consiste en su ser verdadero. ¿Pero no es una verdad que el Sol es más grande que la Luna? ¿Y el ser de una verdad no consiste justamente en su ser verdad? ¿No hay que reconocer entonces en la proposición interrogativa

«¿Es el Sol más grande que la Luna?»

una verdad, un pensamiento cuyo ser consiste en ser verdadero? No. La verdad no puede pertenecer al sentido de una proposición interrogativa. Eso contradiría la esencia de la pregunta. El contenido de la pregunta es lo que hay que juzgar. De ahí que el ser verdadero no pueda ser asignado al contenido de la pregunta. Si yo hago la pregunta de si el Sol es más grande que la Luna, con ello reconozco el sentido de la proposición interrogativa

«¿Es el Sol más grande que la Luna?».

Ahora bien, si este sentido fuera un pensamiento cuyo ser consiste en su ser verdadero, co nello reconozco el ser verdadero de ese sentido. El aprehender el sentido sería al mismo tiempo un juzgar, y el pronunciar la pregunta sería al mismo tiempo una afirmación, es decir, la respuesta a la pregunta. Pero en la proposición interrogativa no puede estar dada la afirmación ni de la verdad ni de la falsedad de su sentido. Por ello, el sentido de una proposición interrogativa no es algo cuyo sentido consista en su ser verdadero. La esencia de la pregunta exige la separación del hecho de aprehender el sentido, del juzgar. Y puesto que el sentido de una proposición interrogativa siempre está puesto en la proposición afirmativa con la cual es dada la respuesta a la pregunta, dicha separación ha de producirse también en la proposición afirmativa. Ello depende también de lo que se entienda por «pensamiento». En todo caso, se precisa de una

breve caracterización de aquello que puede ser sentido de una proposición interrogativa. Usaré para ello la palabra «pensamiento». Según este uso, no todos los pensamientos son verdaderos. El ser de un pensamiento no consiste, pues, en su ser verdadero. Debemos reconocer pensamientos en este sentido porque en el trabajo científico necesitamos preguntas; el investigador debe contentarse a veces con plantear una pregunta hasta tanto pueda contestarla. Al plantear la pregunta, aprehende un pensamiento. Así puedo decir también: el investigador debe contentarse a veces con aprehender un pensamiento. Esto ya es, al menos, un paso hacia la meta, aunque no se trate de un juzgar. Tiene que haber, pues, pensamientos en el sentido aceptado por mí. Pensamientos que luego resultan falsos tienen su justificación en la ciencia, y no deben ser tratados como si no fueran tales. Piénsese en la prueba indirecta. Por ella se realiza el cumplimiento de la verdad justamente a través del aprehender un pensamiento falso. El maestro dice: «Supongamos que *a* no fuera igual a *b*». Un principiante piensa en seguida: «¡Qué absurdo!, yo estoy viendo que *a* es igual a *b*». Confunde falta de sentido de una proposición con falsedad del pensamiento expresado en ella. Es cierto que de un pensamiento falso no se puede concluir nada, pero el pensamiento falso puede ser parte de uno verdadero, del cual sí se puede concluir algo. El pensamiento contenido en la proposición

> «Si el acusado ha estado en Roma en el momento del hecho, él no ha cometido el asesinato» [2],

puede ser reconocido como verdadero por alguien que no sabe si el acusado estaba en Roma en el momento del hecho y si él ha cometido el crimen. Si el todo resulta verdadero, ninguno de sus pensamientos parciales, ni la condición ni la consecuencia poseen poder afirmativo. Tenemos entonces una sola acción de juzgar pero tres pensamientos: el pensamiento total, la condición y la consecuencia. Si alguna de las proposiciones parciales no tuviera sentido, el todo carecería de sentido. A partir de esto se reconoce la diferencia entre que una proposición carezca de sentido o exprese un pensamiento falso. Para los pensamientos que constan de condición y consecuencia vale la ley de que, sin menoscabo de la verdad, lo contrario de la condición puede ser hecho consecuencia y lo contrario de la consecuencia puede ser hecho condición. Los ingleses llaman *contraposition* a este paso. Según esta ley de la proposición

---

[2] Aquí hay que admitir que el solo texto no contiene el pensamiento completo, sino que el complemento de dicho pensamiento hay que obtenerlo de las circunstancias en que se pronuncia.

«Si $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$, entonces $\left(\frac{21}{20}\right)^{1.000}$ es mayor que 10^{21}» se puede pasar a la proposición

$$\text{«Si } \left(\frac{21}{20}\right)^{1.000} \text{ no es mayor que } 10^{21},$$
$$\text{entonces } \frac{21}{20} \text{ no es mayor que } \sqrt[10]{10^{21}}\text{»}$$

Y dichos pasos son importantes para las pruebas indirectas, que de lo contrario no serían posibles.

Ahora bien, si la condición del primero de los dos pensamientos, o sea que $\left(\frac{21}{20}\right)^{1.000}$ es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$, es verdadera, entonces la consecuencia del segundo pensamiento, es decir, que $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ no es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$, es falsa. De acuerdo con esto, quien admita la legitimidad de nuestro paso del *modus ponens* al *modus tollens,* deberá reconocer también un pensamiento falso como existente. De lo contrario, quedaría sólo la consecuencia del *modus ponens* o sólo la condición del *modus tollens;* pero también de éstas quedaría eliminada una como no siendo.

Por ser de un pensamiento se puede también entender que puede ser aprehendido como el mismo por diferente sujetos pensantes. Entonces, el no ser de un pensamiento consistiría en que, de varios sujetos pensantes, cada uno asociaría su propio sentido con la proposición, que entonces sería contenido de su conciencia particular, de modo que no habría un sentido general de la proposición, que pudiera ser aprehendido por varios. ¿Es pues un pensamiento falso aquel que, en ese sentido, no es? En ese caso, los investigadores que se hubiesen reunido para considerar la pregunta de si la tuberculosis de los vacunos es transmisible al hombre, y que, por último, habrían llegado al acuerdo de que tal contagio no existe, estarían en la situación de personas que usaran en su conversación la expresión «este arco iris» y llegaran luego a creer que con esas palabras no habrían designado nada, puesto que cada uno de ellos habría tenido una ilusión óptica cuyo portador habría sido él mismo. Cada uno de esos investigadores debería haberse sentido como burlado por una falsa apariencia, ya que el supuesto de que sus actos y palabras habrían sido razonables no se habría cumplido; no habrían tenido un sentido de la pregunta tratada, que fuese común a todos ellos. Tiene que ser, pues, posible, plantear una pregunta que se pueda negar conforme a la verdad. El contenido de una pregunta tal es, según mi uso del lenguaje, un pen-

samiento. Tiene que ser posible que varios de la misma proposición interrogativa aprehendan el mismo sentido y lo reconozcan como falso. Un tribunal sería una organización de insensatos si no se pudiera admitir que cada uno de los jurados puede entender la pregunta propuesta en el mismo sentido que los otros. Por consiguiente, el sentido de una proposición interrogativa es, aunque la pregunta deba ser negada, algo que puede ser aprehendido por varios.

¿Qué resultaría si el ser verdadero de un pensamiento, consistiera en poder ser aprehendido por varios como el mismo, en tanto que no hubiera para una proposición que expresara algo falso, un sentido común a varios?

Si un pensamiento es verdadero y está compuesto de pensamientos, de los cuales uno es falso, el pensamiento entero podría, por cierto, ser aprehendido por varios como el mismo pero su parte falsa no. Un caso tal puede ocurrir. Por ejemplo, ante un tribunal se puede afirmar con todo derecho: «Si el acusado ha estado en Roma en el momento del hecho, no ha cometido el asesinato», y puede ser falso que el acusado haya estado en Roma en el momento del hecho. Entonces, los jurados, al oír la proposición: «Si el acusado ha estado en Roma en el momento del hecho, no ha cometido el asesinato», pueden aprehender todos el mismo pensamiento, mientras que cada uno de ellos asociaría un sentido particular con la parte condicional de la proposición. ¿Es posible esto? ¿Puede una parte de un pensamiento que se aparece como el mismo a todos los jurados, no ser común a todos ellos? Si el todo no necesita de un portador, tampoco lo necesita ninguna de sus partes.

Por consiguiente, un pensamiento falso no es un pensamiento que no es, incluso en el caso de que por ser se entienda el no necesitar de un portador. Un pensamiento falso debe ser reconocido, si bien no como verdadero, a veces sí como imprescindible: primero, como sentido de una proposición interrogativa; segundo, en tanto parte componente de una asociación hipotética de pensamientos, y en tercer lugar, en la negación. Tiene que ser posible negar un pensamiento falso, y para ello necesitamos de él. Lo que no es, no lo puedo negar. Y lo que necesita de mí como su portador no puedo yo transformarlo en algo cuyo portador no sea yo y que pueda ser aprehendido por varios como lo mismo.

¿Hay que entender el negar un pensamiento como una descomposición de éste en sus partes componentes? Con su juicio negativo los jurados no pueden cambiar nada de lo que constituye el pensamiento manifiesto de la pregunta puesta a su consideración. El pensamiento es verdadero o falso con total independencia de que ellos juzguen justa o injustamente. Y si es falso, es igualmente un pensamiento. Si tras el juicio de los jurados no queda ningún pensamiento, sino sólo restos de pensamiento, entonces, únicamente eso existía antes del juicio. En la aparente

pregunta no les fue expuesto ningún pensamiento, sino sólo restos de pensamiento; no les fue presentado nada que pudieran juzgar.

Mediante el juzgar no podemos cambiar nada de lo que constituye el pensamiento. Sólo podemos reconocer lo que es. A un pensamiento verdadero no podemos hacerle nada con nuestro juzgar. Podemos introducir un «no» en la proposición que lo expresa y con ello obtener una proposición que, tal como ha sido explicado, lejos de no contener ningún pensamiento, puede estar plenamente justificada como condición o consecuencia en una articulación hipotética de proposiciones. El hecho de ser falso sólo le impide ser expresado con poder afirmativo. Pero aquel primer pensamiento no es afectado en nada por este proceso. Sigue siendo verdadero como antes.

¿A un pensamiento falso podemos hacerle algo con negarlo? Tampoco, pues un pensamiento falso sigue siendo un pensamiento y puede aparecer como parte de un pensamiento verdadero. Si en la proposición

«3 es mayor que 5»,

que pronunciamos sin poder afirmativo y cuyo sentido es falso, introducimos un «no», obtenemos

«3 no es mayor que 5»,

proposición que puede ser pronunciada con poder afirmativo. Aquí no hay ninguna señal de una descomposición del pensamiento, de la separación de sus partes.

¿Pues, cómo podría ser descompuesto un pensamiento? ¿Cómo podría ser destruida la relación entre sus partes? El mundo de los pensamientos se reproduce en el mundo de las proposiciones, expresiones, palabras, signos. La construcción del pensamiento se corresponde con la composición de las proposiciones a partir de palabras, de ahí que el ordenamiento no sea, en general, arbitrario. A la descomposición, a la destrucción del pensamiento corresponderá, según ello, una ruptura en las palabras, tal como ocurre, por ejemplo, cuando una proposición escrita sobre papel es seccionada con una tijera, de modo que en cada trozo de papel queda la expresión de una parte del pensamiento. Esos trozos pueden ser, entonces, mezclados arbitrariamente o arrebatados por el viento. La relación se ha disuelto, el ordenamiento originario ya no es reconocible. ¿Ocurre eso cuando negamos un pensamiento? No. El pensamiento resistiría, sin duda, aún esta ejecución *in effigie*. La palabra «no» se intercala, simplemente, en ese ordenamiento de palabras que, en lo demás, permanece invariable. El texto original es aún reconocible; el ordenamiento

no debe ser modificado arbitrariamente. ¿Es eso descomposición, disociación? Al contrario. El resultado es una construcción fuertemente estructurada.

La consideración de la ley *duplex negatio affirmat* permite ver con especial claridad que la negación no tiene ningún efecto de descomposición o disociación. Partamos de la proposición

«La Schneekoppe es más alta que el Brocken» *.

Mediante la introducción de un «no» obtengo

«La Schneekoppe no es más alta que el Brocken».

Ambas proposiciones deben ser pronunciadas sin poder afirmativo. Una segunda negación daría como resultado la proposición:

«No es verdadero que la Schneekoppe no es más alta que el Brocken».

Ya sabemos: la primera negación no puede ocasionar ninguna descomposición en el pensamiento. Pero supongamos, a pesar de ello, que luego de la primera negación sólo tuviéramos trozos de pensamiento. Entonces deberíamos aceptar que la segunda negación podría recomponer esos trozos. La negación se parecería así a una espada que pudiera pegar los miembros que corta. Pero eso requeriría la mayor precaución. En efecto, las partes del pensamiento han perdido su relación y conexión al introducirse la primera negación. De modo que, con el uso imprudente del poder curativo de la negación, podría fácilmente obtenerse:

«El Brocken es más alto que la Schneekoppe».

Ningún no-pensamiento se transforma en un pensamiento por obra de la negación, así como, por medio de ella, ningún pensamiento se vuelve un no-pensamiento.

También una proposición que contiene la palabra «no» en el predicado puede expresar un pensamiento que puede ser hecho contenido de una pregunta; de una pregunta que deje abierta la respuesta, como toda proposición interrogativa.

¿Qué objetos son, pues, los que quedan disociados por obra de la negación? Partes de la proposición, no. Partes del pensamiento, tampoco.

* La Schneekoppe, en el Macizo Bohemio (Riesengebirge), rebasa los 1.600 metros; el Brocken, en el Harz, mide 1.142 metros *(N. de los T.)*.

¿Objetos del mundo exterior? A éstos no les preocupa para nada nuestra negación. ¿Representaciones del mundo interior del que niega? Pero ¿cómo sabe el jurado cuál de sus representaciones tendría que disociar en cada circunstancia? La pregunta que se le formula no remite a ninguna representación determinada. Puede, sí, despertarle representaciones, pero las representaciones despertadas en el mundo interior de cada jurado son diferentes. Entonces, cada jurado se atendría a su propia disociación en su propio mundo interior, y eso no sería un juicio.

Así, pues, no parece posible decir qué es lo que se descompone, destruye o disocia por obra de la negación.

La creencia en el poder disociador de la negación viene asociada con la de que un pensamiento negativo es menos útil que uno afirmativo. Sin embargo, nadie podría creer en la total inutilidad de aquél. Obsérvese la conclusión:

> «Si el acusado no estuvo en Berlín en el momento del asesinato, entonces no cometió el asesinato; pues bien, el acusado no estuvo en Berlín en el momento del asesinato, por lo tanto, no cometió el asesinato.»

Y compáresela con la conclusión siguiente:

> «Si el acusado estuvo en Roma en el momento del asesinato, no cometió el asesinato; pues bien, el acusado estuvo en Roma en el momento del asesinato, por lo tanto no cometió el asesinato.»

Ambas conclusiones proceden de la misma manera, y no hay objetivamente el más mínimo motivo para diferenciar premisas negativas de premisas afirmativas en la ley de conclusión implícita en ellas. Se habla de juicios afirmativos y negativos. También Kant lo hace. Traduciendo eso a mis propios términos se diferenciará más bien entre pensamientos afirmativos y negativos. Diferencia totalmente inútil, al menos para la Lógica, y cuya causa hay que buscarla fuera de la Lógica. No conozco ninguna ley lógica para cuya expresión sea necesario o simplemente ventajoso hacer referencia a estos términos [3].

En toda ciencia en la que se puede hablar de legalidad hay que preguntarse siempre: ¿qué artificios de expresión serían necesarios, o al

[3] Por ello tampoco he usado la expresión «pensamiento negativo» en mi ensayo *El pensamiento* (contribución a La filosofía del Idealismo alemán, tomo I, páginas 58-77). La diferenciación entre pensamiento afirmativo y negativo sólo hubiera complicado la cosa. Ein ninguna parte hubiera habido ocasión de enunciar algo acerca de los pensamientos afirmativos excluyendo de allí a los negativos, o de enunciar algo de los negativos excluyendo de allí a los afirmativos.

menos útiles, para expresar con exactitud las leyes de esa ciencia? Lo que no resiste esta prueba es desdeñable.

A eso se suma la dificultad de decir qué es un juicio negativo (pensamiento negativo). Obsérvense las proposiciones «Cristo es inmortal», «Cristo vive eternamente», «Cristo no es inmortal», «Cristo es mortal», «Cristo no vive eternamente». ¿En qué casos se trata de pensamientos afirmativos, en qué caso de pensamientos negativos?

Corrientemente aceptamos que, cuando el «no» se relaciona con el verbo del predicado, la negación se extiende a todo el pensamiento. Pero a veces la palabra negativa forma gramaticalmente parte del sujeto, como en la proposición «ningún ser humano vive más de cien años». Una negación puede hallarse en cualquier parte de la proposición sin que por ello el pensamiento sea decididamente negativo. Vemos, pues, a qué delicadas cuestiones puede conducir la expresión «juicio negativo» (pensamiento negativo). Las consecuencias pueden ser interminables discusiones, desarrolladas con enorme ingeniosidad, pero en lo esencial infructuosas. Por ello propongo que la diferenciación entre pensamientos o juicios afirmativos y negativos se deje en suspenso hasta tanto se tenga una característica para distinguir con seguridad en cada caso un juicio negativo de uno afirmativo. Cuando se tenga esa característica se podrá saber también qué utilidad hay que esperar de tal diferenciación. Por el momento dudo aún de que ello sea posible. Aquella característica no se podrá obtener del lenguaje, pues los lenguajes son poco confiables en cuestiones de lógica. Señalar las trampas que el lenguaje tiende al pensamiento, no es precisamente de las más insignificantes tareas del lógico.

Después que se han eliminado errores, puede ser útil ir en busca de las fuentes donde se han originado. Una de esas fuentes es, a mi parecer, la necesidad de dar definiciones de los conceptos que se quiere manejar. Por cierto que es loable el esfuerzo de hacer lo más claro posible el sentido que se asocia con una expresión. Pero no hay que olvidarse de que no todo es definible. Cuando se quiere definir a toda costa algo que por su esencia no es definible, se entra fácilmente en la dependencia de cosas secundarias, y con ello la investigación se encarrila desde su inicio en una vía falsa. Y eso es quizá lo que les ocurrió a muchos que quisieron aclarar qué es un juicio y cayeron en el problema de la composición [4].

[4] Se acierta mejor con el uso vivo del lenguaje si se entiende por juicio una ación de juzgar, así como salto es una acción de saltar. Pero con ello queda sin resolver el centro de la dificultad, que reside en la palabra «juzgar». Juzgar —podría seguir diciéndose—es reconocer algo como verdadero. Lo que es reconocido como verdadero, sólo puede ser un pensamiento. Aquel centro originario parece ahora haberse partido: una parte reside en la palabra «pensamiento», la otra en la palabra «verdadero». Y aquí hay que detenerse. Es necesario hacerse a la idea de que no se puede seguir definiendo hasta el infinito.

El juicio se compone de partes que tienen un determinado orden, una determinada relación, que están en conexión las unas con las otras. ¿Pero con qué todo no ocurre lo mismo?

A ello se asocia otro error: el creer que el que juzga funda con su juzgar el orden, la relación de las partes, y así lleva a efecto el juicio. Con ello no se mantienen separados el aprehender un pensamiento y el reconocimiento de su verdad. Es cierto que en muchos casos estas acciones se siguen tan inmediatamente la una a la otra, que parecen fundirse en una sola acción, pero no es así en todos los casos. Entre el aprehender un pensamiento y el reconocimiento de su verdad pueden transcurrir años de trabajosas investigaciones. Es evidente que el pensamiento, la relación entre sus partes, no son fundados por obra del juzgar, pues todo ello existía ya antes. Pero tampoco el aprehender un pensamiento es un crear un pensamiento ni un fundar el orden de sus partes, pues el pensamiento era verdadero ya antes, ya consistía en el orden de sus partes antes de ser aprehendido. Así como un caminante no crea una montaña al escalarla, tampoco el que juzga crea un pensamiento reconociéndolo por verdadero. Si lo hiciera, un mismo pensamiento no podría ser reconocido como verdadero ayer por éste, hoy por aquél; y ni siquiera por la misma persona podría el mismo pensamiento ser reconocido como verdadero en momentos diferentes. Entonces habría que admitir que el ser de ese pensamiento estaría sujeto a interrupciones.

Si se considera posible que alguien cree mediante su juzgar aquello que con su juzgar reconoce como verdadero, en tanto funda la relación, el orden de sus partes, entonces se está muy próximo a adjudicarle también la capacidad de destruir. Así como el destruir se opone al construir, al fundar orden y relaciones; del mismo modo el negar parece oponerse al juzgar, y fácilmente se llega a admitir que la destrucción de relaciones mediante el negar ocurre de la misma manera que el construir mediante el juzgar. Así parecen ser el juzgar y el negar dos polos opuestos, que constituyen justamente un par del mismo rango, comparables, por ejemplo, a la oxidación y reducción en la química. Pero si se ha visto que mediante el juzgar no se funda ninguna relación, sino que el orden de las partes del pensamiento ya existía antes del juzgar, entonces todo se ilumina con

---

Si el juicio es una acción, entonces ocurre en un determinado momento y pertenece luego al pasado. A una acción le corresponde también un actor, y no se conoce completamente la acción si no se conoce también al actor. No se puede, pues, hablar de juicio sintético en el sentido corriente. Si llamamos así al de que por dos puntos sólo pasa una recta, entonces no se entiende por «juicio» una acción que ha sido hecha por un determinado hombre en un determinado momento, sino algo que es atemporalmente verdadero, aun cuando su verdad no sea reconocida por ningún hombre. Si a ello llamamos verdad, tal vez mejor que «juicio sintético» podríamos decir «verdad sintética». Si a pesar de ello se prefiere la expresión "juicio sintético", entonces hay que prescindir del sentido del verbo "juzgar".

nueva luz. Hay que señalar nuevamente que el aprehender un pensamiento no es aún juzgar; que se puede expresar un pensamiento en una proposición sin afirmar con ello su verdad; que en el predicado de una proposición puede estar contenida una palabra negativa y que entonces el sentido de esta palabra es parte del sentido de la proposición, parte de un pensamiento; que mediante la introducción de un «no» en el predicado de una proposición que debe ser pronunciada sin poder afirmativo, se obtiene una proposición que, como la originaria, contiene un pensamiento. Si al paso de un pensamiento al opuesto llamamos negar, este negar no es del mismo rango que el juzgar ni tampoco entendible como el polo opuesto del juzgar, ya que en el juzgar siempre está en juego la verdad, mientras que de un pensamiento se puede pasar al opuesto sin preguntar por la verdad. Para excluir malentendidos téngase en cuenta que dicho paso ocurre en la conciencia del sujeto pensante, pero que tanto el pensamiento del cual se parte, así como el pensamiento al cual se pasa, ya existen antes de que esto ocurra; y que, por lo tanto, mediante este proceso mental no se cambia nada, ni en lo existente ni en las relaciones entre los dos pensamientos.

Tal vez ese negar, cuya existencia como polo opuesto al juzgar es cuestionable, sea una figura quimérica, nacida de la fusión del juzgar y de aquella negación que yo reconocí como posible parte del pensamiento, y a la que en el lenguaje le corresponde la palabra «no» como parte del predicado; quimérica por cuanto esas dos partes son de naturaleza totalmente diferente. El juzgar, en efecto, en tanto proceso mental, necesita al que juzga como su portador; la negación, en cambio, en tanto parte del pensamiento no necesita, como tampoco el pensamiento, de ningún portador: no se la puede entender como contenido de conciencia. Y, sin embargo, es totalmente incomprensible cómo puede surgir tan siquiera la apariencia de un figura quimérica tal. El lenguaje no tiene ninguna palabra especial, ninguna sílaba especial para el poder afirmativo; éste reside en la forma de la proposición afirmativa, que se manifiesta especialmente en el predicado. Por otra parte, la palabra «no» está en estrecha relación con el predicado, y puede ser considerada parte de éste. Así puede parecer que surge una relación entre la palabra «no» y el poder afirmativo, que es lo correspondiente al juzgar en el plano lingüístico. Pero resulta trabajoso diferenciar las dos maneras de negar. Al término de «polo opuesto del juzgar» sólo lo he introducido para acostumbrarme a una concepción extraña para mí. Ahora vielvo a mi modo de expresión anterior. A aquello que provisoriamente llamé polo opuesto del juzgar, ahora lo consideraré una segunda manera de juzgar, sin admitir por ello que haya una tal segunda manera. Polo y polo opuesto serán ahora reunidos bajo el nombre común de «juzgar», lo cual es posible porque el polo y su

opuesto se corresponden. La pregunta debe ser planteada, entonces, de este modo:

¿Hay dos maneras distintas de juzgar, una de las cuales se usa para la respuesta afirmativa a una pregunta, la otra para la respuesta negativa? ¿O el juzgar es el mismo en los dos casos? ¿El negar pertenece al juzgar? ¿O es la negación parte del pensamiento que subyace en el juzgar? ¿El juzgar es, también en el caso de respuesta negativa a una pregunta, el reconocimiento de la verdad de un pensamiento? Entonces éste no será el pensamiento contenido inmediatamente en la pregunta, sino el opuesto a él.

Sea, por ejemplo, la pregunta: «¿El acusado puso fuego a su casa intencionalmente?» «Cómo será la respuesta, como proposición afirmativa, en caso de que se respondiera negativamente? Si para el negar hay una manera especial de juzgar, consecuentemente tenemos que tener una forma especial para la afirmación. En este caso diré «es falso que...» conviniendo que esta fórmula siempre ha de ser asociada al poder afirmativo. Así la respuesta será: «Es falso que el acusado puso fuego a su casa intencionalmente.» Si, por el contrario, hay solamente una manera de juzgar, se dirá con poder afirmativo: «El acusado no puso fuego a su casa intencionalmente». Y aquí se presenta como verdadero el pensamiento opuesto al expresado en la pregunta. La palabra «no» forma aquí parte de la expresión de ese pensamiento. Remito ahora a las dos conclusiones que antes comparé una con otra. Allí la segunda premisa de la primera conclusión era la respuesta negativa a la pregunta: ¿Estuvo el acusado en Berlín en el momento del asesinato?», pregunta elegida para el caso de que sólo haya una manera de juzgar. El pensamiento implícito en esta premisa está contenido en la proposición condicional de la primera premisa, pero pronunciado sin poder afirmativo. La segunda premisa de la segunda conclusión era la respuesta afirmativa a la pregunta: «¿Estuvo el acusado en Roma en el momento del crimen?». Estas conclusiones proceden según la misma ley, y esto favorece la opinión de que, en el caso de la respuesta negativa o en el de la respuesta afirmativa a una pregunta, siempre se trata de un mismo juzgar. Si, en cambio, tuviéramos que ver en el negar una manera especial del juzgar, a la cual le correspondiera en el plano de las proposiciones y de las palabras una manera especial del afirmar, la cosa sería distinta.

La primera premisa de la primera conclusión decía: «Si el acusado no estuvo en Berlín en el momento del asesinato, no cometió el asesinato.» Aquí no debe decirse: «Si es falso que el acusado estuvo en Berlín en el momento del crimen», pues ha sido establecido que las palabras «es falso» siempre han de estar asociadas al poder afirmativo; pero con el reconocimiento de la verdad de esta primera premisa no se reconoce como ver-

dadera ni la condición contenida en ella, ni la consecuencia. La segunda premisa deberá, en cambio, decir: «Es falso que el acusado estuvo en Berlín en el momento del crimen», pues, como premisa, ella debe ser pronunciada con poder afirmativo. La conclusión, sin embargo, ya no es posible como antes, puesto que el pensamiento de la segunda premisa ya no coincide con la condición de la primera premisa, sino que es el pensamiento de que el acusado estuvo en Berlín en el momento del asesinato. Si, no obstante, se quiere hacer valer la conclusión, con ello se reconoce que en la segunda premisa está contenido el pensamiento de que el acusado no estuvo en Berlín en el momento del asesinato. Con ello se separa el negar del juzgar, se lo extrae del sentido de «es falso que...» y se une la negación con el pensamiento.

De modo, pues, que hay que rechazar la suposición de dos maneras de juzgar. ¿Pero cuáles son las consecuencias de esta decisión? Quizá se la podría considerar sin valor porque de ella no resulta un ahorro en componentes lógicos elementales. Al suponer, en efecto, dos maneras de juzgar, necesitamos:

1) el poder afirmativo para el caso del afirmar,
2) el poder afirmativo para el caso de la negación, como ser en relación indisoluble con la palabra «falso»,
3) una palabra negativa como «no», en proposiciones que son pronunciadas sin poder afirmativo.

Si, en cambio, admitimos sólo una manera de juzgar, necesitaremos para ello solamente:

1) el poder afirmativo,
2) una palabra negativa.

tal economía manifiesta la posibilidad de llevar el análisis siempre más adelante, el que, a su vez produce una visión más clara. A ello se asocia el ahorro de una ley de conclusión. Allí donde por decisión operamos con una sola, necesitaríamos, de lo contrario, dos. Si podemos operar con sólo una manera de juzgar, también debemos hacerlo, y entonces no podemos asignarle a la fundación de orden y conexiones una manera de juzgar, y a la destrucción otra.

Así, a cada pensamiento le corresponde otro que lo contradice [5], de manera que un pensamiento es considerado falso por el hecho de que el pensamiento que lo contradice es reconocido por verdadero. La proposi-

[5] Podría decirse también «que se le opone».

ción que expresa al pensamiento que contradice se forma introduciendo una palabra negativa en la expresión del pensamiento originario.

La palabra o sílaba negativa parece, con frecuencia, unirse más estrechamente a una parte de la proposición, por ejemplo, al predicado. De ahí puede surgir la opinión de que no es el contenido de la proposición entera lo que se niega, sino sólo el de esa parte. Se puede llamar irrelevante a una persona, y con ello establecer como falso al pensamiento de que ella es relevante. Eso se puede entender como respuesta negativa a la pregunta «¿Esa persona es relevante?», de donde se ve que con ello no se niega sólo el sentido de una palabra. Es incorrecto decir: «puesto que la sílaba negativa se ha unido a una parte de la proposición, no se niega el sentido de la proposición entera». Más aún: porque la sílaba negativa se unió a una parte de la proposición, se niega el contenido de toda la proposición. Esto quiere decir: mediante la negación surge una proposición, cuyo pensamiento contradice al de la proposición originaria. Con ello no se discute que a veces la negación se extiende sólo a una parte de un pensamiento.

El pensamiento que contradice a un pensamiento es el sentido de una proposición, a partir de la cual se puede formar fácilmente la proposición que expresa a aquél. De acuerdo con esto, el pensamiento que contradice a un pensamiento parece estar compuesto por este último más la negación. Con ésta no me refiero a la acción de negar. Pero las palabras «compuesto» «consistir», «componente» o «parte» pueden llevar a una concepción incorrecta. Cuando aquí se habla de partes, esas partes no están en la misma independencia unas de otras, como en general se entiende de las partes de un todo. El pensamiento no necesita, para su existencia, de ningún complemento, es completo en sí mismo. La negación, en cambio, necesita ser completada mediante un pensamiento. Ambos componentes —si se quiere usar esta expresión— son de naturaleza totalmente diferente y contribuyen de un modo totalmente distinto a la formación del todo. Este completa, aquél es completado. Y el todo se sostiene por obra de esa complementación. Para mostrar también respecto del lenguaje esta necesidad de complementación, se puede escribir «la negación de ...». El vacío después del «de» indica dónde hay que introducir el complemento. Pues al hecho de completar en el plano de los pensamientos y sus partes, le corresponde algo similar en el plano de las proposiciones y sus partes. En lugar de la proposición «de» seguida del sustantivo, puede estar también el genitivo del sustantivo *, lo cual es, en muchos casos, lingüísticamente más aceptable,

---

* Al traducir aquí «von» por «de» tenemos conciencia de que estamos falseando el sistema castellano. Este, en efecto, no tiene como el alemán la oposición «preposición + sustantivo» — «sustantivo en genitivo» para expresar el complemento *(N. de los T.)*.

pero en éste no ilustra bien la necesidad de complementación de la parte. Un ejemplo hará más claro lo que quiero decir. El pensamiento que contradice al pensamiento

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ es igual a } \sqrt[10]{10^{21}}$$

es que

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ no es igual a } \sqrt[10]{10^{21}}.$$

Se puede decir también: «el pensamiento

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ no es igual a } \sqrt[10]{10^{21}},$$

es la negación del pensamiento

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ es igual a } \sqrt[10]{10^{21}}.\text{»}$$

Esta última expresión, después del penúltimo «es», permite reconocer la composición del pensamiento a partir de una parte que necesita ser completada y otra que completa a ésta. A partir de ahora usaré la palabra «negación», cuando no entre comillas, siempre acompañada del artículo determinante. El artículo determinante «la» en la expresión

«la negación del pensamiento de que 3 es mayor que 5»

deja ver que esta expresión hace referencia a un individuo determinado. Ese individuo es aquí un pensamiento. El artículo determinante hace de toda la expresión un nombre individual, representante de un nombre propio.

La negación de un pensamiento es, pues, ella misma un pensamiento, y puede servir nuevamente para complementar la negación. Al usar la negación del pensamiento de que $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$, como complemento de la negación, obtengo

> la negación de la negación del pensamiento de que $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$.

Eso es de nuevo un pensamiento. Referencias a pensamientos así formados se obtienen según el modelo

«la negación de la negación de *A*»,

donde «*A*» representa la referencia a un pensamiento. Tal referencia hay que entenderla como

compuesta, por de pronto, de las partes

«la negación de...»

y

«la negación de *A*».

Pero también es posible la concepción de que está formada por las partes

«la negación de la negación de...»
y «*A*».

Aquí he unido la parte media de la referencia, primero con la parte que está a la izquierda de ella, y luego, lo así obtenido, con la parte «*A*», que está a la derecha, mientras que, originalmente, fueron unidas la parte media con «*A*» y la designación así obtenida,

«la designación de *A*»,

con lo que está a la izquierda,

«la negación de...».

A las dos diferentes concepciones de la designación les corresponden también dos diferentes concepciones del pensamiento que designa.

Por la comparación de las designaciones

«la negación de la negación de que $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$»

y

«la negación de la negación de que 5 es mayor que 3»

se llega al reconocimiento de un componente común,

«la negación de la negación de...»

que es la designación de una parte de pensamiento común que necesita

ser completada. En los dos casos ella es completada por un pensamiento, en el primer caso por el de que $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$; en el segundo caso, por el pensamiento de que 5 es mayor que 3. El resultado de esta complementación es, en ambos casos, un pensamiento. Al componente común que necesita ser completado se lo puede llamar doble negación. El ejemplo muestra cómo algo que necesita ser completado puede fundirse con algo que necesita ser completado, para formar algo que necesita ser completado. Aquí se da el caso especial de que algo —la negación de ...— se funde consigo mismo. Fallan, pues, para ello las imágenes tomadas del plano de lo corporal, pues un cuerpo no puede fundirse consigo mismo, de modo que surja algo diferente de él mismo. Es claro que los cuerpos no necesitan ser completados en el sentido aquí señalado. Podemos componer cuerpos congruentes, y en el plano de las designaciones tenemos, aquí también, congruencia. Pero a referencias congruentes les corresponde lo mismo en el plano de lo designado.

La expresión por imágenes, usada con cuidado, puede contribuir, sin duda, a esclarecer. Comparo lo que necesita ser completado, con un abrigo, que, por ejemplo, como una chaqueta, no se sostiene por sí mismo, sino que para ello necesita algo que cubrir. El que ya lleva un abrigo puede ponerse otro —por ejemplo, un gabán—. Ambos abrigos se unen en uno solo. Así son posibles dos concepciones. Se puede decir, el que llevaba una chaqueta se pone ahora un segundo abrigo, un gabán; o bien tiene una vestimenta compuesta de dos abrigos —chaqueta y gabán—. Ambas concepciones están completamente justificadas. El abrigo que se agrega se une al que ya estaba, para formar uno nuevo. Por cierto, no debe olvidarse que el ponerse abrigos o la formación de compuestos son procesos que ocurren en el tiempo, mientras que lo equivalente en el plano del pensamiento es atemporal.

Si *A* es un pensamiento que no pertenece a la poesía, tampoco pertenece a la poesía la negación de *A*. De ambos pensamientos, *A* y la negación de *A*, siempre es uno, y sólo uno, verdadero. Igualmente, entonces, es de los dos pensamientos, la negación de *A* y la negación de la negación de *A*, siempre uno, y sólo uno, verdadero. Pues bien, la negación de *A* es o bien verdadera, o bien no verdadera. En el primer caso, ni *A* ni la negación de la negación de *A* son verdaderas. En el segundo, son verdaderos tanto *A* como la negación de la negación de *A*. De los dos pensamientos —*A* y la negación de la negación de *A*— es, pues, o bien cada uno de ellos o ninguno de los dos verdadero. También lo puedo expresar así:

> la doble negación que recubre a un pensamiento no altera su valor de verdad.

INVESTIGACIONES LOGICAS. TERCERA PARTE: ARTICULACIÓN DE PENSAMIENTOS

(Contribución a *La filosofía del Idealismo alemán*, III, 1923-26, págs. 36 a 51.)

Es sorprendente lo que el lenguaje permite, al poder expresar con pocas sílabas un incalculable número de pensamientos, a tal punto que hasta para un pensamiento aprehendido por primera vez, por un habitante de la superficie terrestre encuentra una expresión en la que otro, para el cual ese pensamiento es totalmente nuevo, puede igualmente reconocerlo. Esto no sería posible si no pudiéramos diferenciar partes en los pensamientos, a las que corresponden partes de las proposiciones, de tal tal manera que la construcción de la proposición puede servir como imagen de la construcción del pensamiento. Claro está que, cuando extendemos al pensamiento esa relación del todo y la parte, nos movemos en el plano de la comparación. Pero la comparación es tan cercana y, en lo general, se adapta tan bien, que las posibles cojeras resultantes de ella ni siquiera podemos considerarlas molestas.

Si los pensamientos son vistos como compuestos de partes simples y a éstas se las hace corresponder con partes simples de la proposición, se torna comprensible que a partir de pocas partes se pueda formar una gran variedad de proposiciones, a las cuales corresponde, nuevamente, una gran variedad de pensamientos. Aquí cabe preguntarse cómo se lleva a cabo la construcción del pensamiento y de qué manera se articulan esas partes para que el todo sea algo más que las partes aisladas. En mi ensayo *La negación* [1] he considerado el caso de que un pensamiento aparece compuesto de una parte que necesita ser completada o, también podría decirse, no colmada, a la que en el lenguaje le corresponde la palabra negativa, y de un pensamiento. No podemos negar sin aquello que estamos negando, y esto es un pensamiento. Por el hecho de que el pensamiento colma la parte no colmada o, como también puede decirse, completa la parte que necesita ser completada, se logra la consistencia del todo. Y cabe la suposición de que, en la lógica, la articulación en un todo siempre ocurre en razón de que algo no colmado es colmado [2].

Aquí hemos de considerar ahora un caso especial de articulación:

---

[1] Tomo I de esta publicación, pág. 143.

[2] Aquí, como en lo sucesivo, debe tenerse en cuenta que este colmar, este articular no es un proceso en el tiempo.

aquél en que dos pensamientos son articulados en uno solo. En el plano del lenguaje le corresponderá la articulación de dos proposiciones en un todo, que es igualmente una proposición. Para la expresión «articulación de pensamientos» me baso en los términos de la Gramática «articulación de proposiciones», sin querer decir con ello que toda articulación de proposiciones tenga por sentido una articulación de pensamientos, o que cada articulación de pensamientos sea sentido de una articulación de proposiciones. Por articulación de pensamientos entiendo un pensamiento que consiste en pensamientos, pero no sólo en pensamientos. Un pensamiento, en efecto, es completo y colmado, no necesita, para existir, de ningún complemento. Por eso los pensamientos no se adhieren los unos a los otros, a no ser que algo que no sea un pensamiento, los articule. Tenemos derecho a suponer que lo articulante es algo no colmado. La articulación de pensamientos es, ella misma, un pensamiento, es decir, algo a lo cual se aplica aquello de que es verdadero o falso, una tercera posibilidad no existe.

No toda proposición compuesta lingüísticamente de proposiciones nos proporciona un ejemplo útil. En efecto, la gramática da cuenta de proposiciones que no pueden ser propiamente reconocidas como tales por la lógica, porque no expresan ningún pensamiento. Eso nos muestran las proposiciones relativas, pues en una de ellas, que haya sido separada de la proposición principal, no podemos reconocer a qué hace referencia el pronombre relativo. En una proposición tal no tenemos un sentido por cuya verdad podamos preguntar; en otras palabras: como sentido de una proposición relativa aislada no tenemos ningún pensamiento. Entonces no podemos esperar que a una articulación de proposiciones consistente en una proposición principal y una proposición de relativo, le corresponda como sentido una articulación de pensamientos.

Primer tipo de articulación de pensamientos

Desde el punto de vista del lenguaje, el caso de que una proposición principal esté unida a una proposición principal parece el más sencillo. Sin embargo, la cosa no es tan sencilla, según como, por de pronto, se nos presenta. Pues en una proposición afirmativa hay que diferenciar dos cosas: el pensamiento expresado y la afirmación. Sólo del pensamiento se trata aquí, pues no son acciones de juzgar las que han de ser unidas[3].

[3] Al parecer, por «juicio» entienden los lógicos, con frecuencia algo equivalente a lo que yo llamo pensamiento. Yo digo: se juzga en tanto que se reconoce un pensamiento como verdadero. A la acción de este reconocimiento llamo juicio. El juicio es manifestado por una proposición pronunciada con poder afirmativo. Pero se puede aprehender y expresar un pensamiento sin reconocerlo como verdadero, es decir, sin juzgar.

Por ello entiendo las proposiciones que se han de unir con «y» de manera que ellas sean pronunciadas sin poder afirmativo. La manera más fácil de suprimir el poder afirmativo es transformar el todo en una pregunta, pues en la pregunta se puede expresar el mismo pensamiento que en la proposición afirmativa, pero sin afirmación. Si unimos con «y» dos proposiciones, de las cuales ninguna es pronunciada con poder afirmativo, deberemos preguntarnos si el sentido del todo así resultante es un pensamiento. Entonces, no sólo cada una de las dos proposiciones parciales debe tener un sentido, sino también el todo, que puede ser transformado en contenido de una pregunta. Si se pregunta a los jurados: «¿Encendió el acusado intencionalmente una pila de leña y provocó intencionalmente el incendio de un bosque?», entonces se trata de si aquí hay dos preguntas o sólo una. Si a los jurados les está permitido contestar que sí a la pregunta relativa a la pila de leña, pero negar la que se refiere al incendio del bosque, entonces tenemos dos preguntas, cada una de las cuales contiene un pensamiento. Un pensamiento compuesto por esos dos pensamientos no entra aquí en cuestión. Pero si los jurados sólo deben contestar «sí» o «no», sin dividir el todo en preguntas parciales —y eso es lo que supongo aquí—, el todo es sólo una pregunta, y a ella habrá que contestar que sí, si el acusado encendió intencionalmente la leña y provocó intencionalmente el incendio del bosque. En cualquier otro caso la pregunta debe ser negada. Si, por ejemplo, un jurado opina que el acusado puso intencionalmente fuego a la leña, pero el fuego se propagó luego y alcanzó al bosque, sin la intención del acusado, debe negar la pregunta. Hay que diferenciar, pues, el pensamiento de la pregunta total de los de las preguntas parciales. Aquella contiene, además de los dos pensamientos parciales, aquello que los articula, y a esto le corresponde en el lenguaje el «y». Esta palabra es usada aquí de una manera especial. En este caso entra sólo en consideración como palabra de unión entre proposiciones. Llamo estrictamente proposición a la que expresa un pensamiento. Pero pensamiento es algo a lo cual se aplica lo de que es verdadero o falso, una tercera posibilidad no existe. El «y» del que se está hablando sólo ha de unir proposiciones que se pronuncian sin poder afirmativo. Con lo cual el dar juicio no está excluido, pero si ocurre ha de referirse al conjunto de los dos pensamientos articulados. Si queremos proponer como verdadera una articulación de este primer tipo aquí considerado, podemos usar, por ejemplo el giro «es verdadero que... y que...». Nuestro «y» ha de unir proposiciones interrogativas tanto menos que proposiciones afirmativas. En nuestro ejemplo, al jurado se le hace una única pregunta. Pero el pensamiento que esa pregunta propone juzgar está compuesto de dos pensamientos. El jurado puede dar sólo un juicio con su respuesta. Por cierto que esto podrá parecer una rebuscada sutileza. ¿No es lo mismo que el jurado conteste que sí

primero a la pregunta: «¿Encendió el acusado intencionalmente una pila de leña?», y luego a la pregunta: «¿Provocó intencionalmente el acusado el incendio de un bosque?, o que conteste afirmativamente de una vez a toda la pregunta? En caso de respuesta afirmativa puede parecer así; la diferencia se hace clara en el caso de que la pregunta sea negada. Por ello es útil expresar el pensamiento en una pregunta, pues si se quiere aprehender correctamente el pensamiento hay que contemplar el caso de la afirmación así como el de la negación.

El «y», determinado así más exactamente en su forma de uso, se aparece como doblemente no colmado. Exige, para ser colmado, una proposición que anteceda y una proposición que siga. También lo que corresponde al «y» en el plano del sentido debe ser doblemente no colmado. Y al ser colmado por medio de pensamientos, articula esos pensamientos el uno como el otro [4]. Como simple objeto, la letra «y» está tan colmada como cualquier otro objeto. Se la puede llamar no colmada en relación a su modo de uso como signo, que debe expresar un sentido, y en cuanto aquí sólo puesta entre dos proposiciones puede tener el sentido que se le quiere dar. Su misión de signo exige que sea completada mediante una proposición que proceda y otra que siga. En rigor el no ser colmado ocurre en el plano del sentido y desde allí es transmitido al signo. Si «*A*» es propiamente una proposición, que se pronuncia sin poder afirmativo y no como pregunta, y si lo mismo vale para «*B*», entonces «*A* y *B*» es igualmente una proposición unitaria y su sentido es una articulación de pensamientos del primer tipo. A lo cual agrego: «*A* y *B*» expresa una articulación de pensamientos del primer tipo.

Que «*B* y *A*» tiene el mismo sentido que «*A* y *B*» lo comprendemos sin prueba, haciéndonos conscientes del sentido. Tenemos aquí un caso en que a diferentes expresiones les corresponde lingüísticamente el mismo sentido. Este alejamiento del pensamiento expresado por parte del signo que lo expresa es una consecuencia inevitable de la diversidad de lo que del mundo de los pensamientos aparece en el tiempo y en el espacio [5].

Por último remitámonos a la siguiente conclusión:

A es verdadero [6];
B es verdadero; por lo tanto
(*A* y *B*) es verdadero.

[4] Comp., nota 12, pág. 47.
[5] Otro caso similar es el de que «*A* y *A*» tiene el mismo sentido que «*A*».
[6] Cuando escribo «*A* es verdadero» quiero decir exactamente: «el pensamiento expresado en la proposición "*A*" es verdadero». Lo mismo en casos similares.

Segundo tipo de articulación de pensamientos

La negación de una articulación del primer tipo, de un pensamiento con un pensamiento, es ella misma una articulación de los mismos dos pensamientos. A ésta la llamaré segundo tipo de articulación de pensamientos. Siempre que una articulación de dos pensamientos del primer tipo es falsa, el segundo tipo de articulación de esos pensamientos es verdadero, y viceversa. Una articulación del segundo tipo es sólo entonces falsa, cuando cada uno de los pensamientos articulados es verdadero. Una articulación de pensamientos del segundo tipo es siempre verdadera, cuando, por lo menos, uno de los pensamientos articulados es falso. Se supone siempre que los pensamientos no pertenecen a la poesía. Al dar por verdadera una articulación de pensamientos del segundo tipo, declaro a los pensamientos articulados incompatibles.

Sin saber si

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ es mayor que } \sqrt[10]{10^{21}},$$

y sin saber si

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ es menor que } \sqrt[10]{10^{21}},$$

puedo reconocer, sin embargo, que la articulación del primer tipo de estos dos pensamientos es falsa. En consecuencia, la articulación del segundo tipo de esos pensamientos es verdadera. Además de los pensamientos articulados tenemos algo que los articula. Lo que los articula es también aquí doblemente no colmado. Y la articulación se lleva a cabo cuando los pensamientos parciales colman al elemento articulante.

Para hacer expresar una articulación de pensamientos de este tipo, escribo

«no [*A* y *B*]»,

donde «*A*» y «*B*» son las proposiciones correspondientes a los pensamientos articulados. En esta expresión surge con más claridad el articulante: es el sentido de aquello que, fuera de las letras «*A*» y «*B*», está presente en ella. Los dos vacíos en la expresión

«[no y]»,

dejan ver lo doblemente no colmado. El articulante es el sentido doblemente no colmado de esta expresión doblemente no colmada. Si llenamos

los vacíos con expresiones de pensamientos, formamos una expresión de una articulación de pensamientos del segundo tipo. Pero, en rigor, no debe decirse que la articulación de pensamientos surja así, pues es un pensamiento, y un pensamiento no surge.

En una articulación de pensamientos del primer tipo, los dos pensamientos son intercambiables. Esta posibilidad de intercambio debe también conservarse en la negación de una articulación de pensamientos del primer tipo, es decir en una articulación de pensamientos del segundo tipo. Así, pues, si «no *A* y *B*» expresa una articulación de pensamientos, así también «no *B* y *A*» expresa una articulación de los mismos pensamientos. Esta posibilidad de intercambio no debe entenderse aquí, como tampoco en las articulaciones del primer tipo, como un teorema, pues en el plano del sentido no existe ninguna diferencia. Se sobreentiende, pues, que el sentido de la segunda articulación de proposiciones es verdadero, si es verdadero el de la primera, pues es el mismo sentido.

También aquí puede ser introducida una conclusión.

No [*A* y *B*] es verdadero;
A es verdadero; por lo tanto,
B es falso.

Tercer tipo de articulación de pensamientos

La articulación del primer tipo de la negación de un primer pensamiento con la negación de un segundo pensamiento es también una articulación del primer pensamiento con el segundo. Llamo a ésta articulación del tercer tipo del primer pensamiento con el segundo. Sea, por ejemplo, el primer pensamiento, que Pablo sabe leer; el segundo, que Pablo sabe escribir. La articulación de tercer tipo para estos dos pensamientos es, pues, que Pablo no sabe ni leer ni escribir. Una articulación de pensamientos del tercer tipo es sólo entonces verdadera, cuando cada uno de los dos pensamientos articulados es falso. Una articulación de pensamientos del tercer tipo es falsa cuando, por lo menos, uno de los pensamientos articulados es verdadero. También en la articulación de pensamientos del tercer tipo los dos pensamientos articulados son intercambiables. Si «*A*» expresa un pensamiento, entonces «*A*» no expresará la negación de ese pensamiento. Valga lo correspondiente para «*B*». Si «*A*» y «*B*» son propiamente proposiciones, el sentido de

«(no *A*) y (no *B*)»,

que transcribo

«ni *A* ni *B*»,

es la articulación del tercer tipo, de los pensamientos expresados por «*A*» y por «*B*».

El articulante es aquí el sentido de aquello que, fuera de las letras «*A*» y «*B*», aparece en esas expresiones. Ambos vacíos en

«(no) y (no)»

o en

«ni ni »,

muestran lo doblemente no colmado de dichas expresiones, que se corresponde con lo doblemente no colmado del articulante. Al ser colmado éste por pensamientos se lleva a cabo la articulación del tercer tipo de estos dos pensamientos.

Sea introducida también aquí una conclusión.

A es falso;
B es falso; por lo tanto
(ni *A* ni *B*) es verdadero.

El paréntesis está indicando que su contenido es el todo cuyo sentido se propone como verdadero.

Cuarto tipo de articulación de pensamientos

La negación de una articulación del tercer tipo de dos pensamientos es igualmente una articulación de esos dos pensamientos. Llámese a ésta cuarto tipo de articulación de pensamientos. El cuarto tipo de articulación de dos pensamientos es la articulación del segundo tipo de las negaciones de estos pensamientos. Si se da por verdadera una tal articulación, con ello se dice que, por lo menos, uno de los pensamientos articulados es verdadero. Una articulación de pensamientos del cuarto tipo es sólo entonces falsa, cuando cada uno de los pensamientos articulados es falso. Nuevamente, si «A» y «B» son propiamente proposiciones, entonces el sentido de

«no [(no *A*) y (no *B*)]»

es una articulación de pensamientos del cuarto tipo, de los pensamientos expresados por «*A*» y «*B*». Lo mismo vale para

«no [ni *A* ni *B*]».

O más simplemente escrito

«*A* o *B*».

El «o», tomado en este sentido, puede estar sólo entre proposiciones, entre proposiciones propiamente dichas *. Al reconocer como verdadera una articulación de pensamientos tal, no excluyo que los dos pensamientos articulados son verdaderos. Tenemos aquí el «o» no excluyente. El articulante es el sentido de aquello que, fuera de *A* y *B*, aparece en «*A* o *B*», o sea el de

«(o)»,

donde los dos vacíos, a la izquierda y a la derecha de «o» señalan lo doblemente no colmado del articulante. Las proposiciones unidas por «o» se conciben sólo como expresiones de pensamientos, es decir, no provistas, individualmente de poder afirmativo. La articulación completa, en cambio, puede ser reconocida como verdadera. En la expresión lingüística, esto no surge claramente. Cuando se afirma: «5 es menor que 4 ó 5 es mayor que 4», cada una de las proposiciones parciales tiene la misma forma lingüística que tendría si fuera pronunciada individualmente, con poder afirmativo; mientras que, en rigor, sólo la articulación total puede ser propuesta como verdadera. Se encontrará, tal vez, que el sentido dado aquí a la palabra «o» no concuerda siempre con el uso lingüístico. Pero, por de pronto, debe tenerse en cuenta que al establecer el sentido de expresiones científicas no se puede tener como propósito acomodarse exactamente al uso diario del lenguaje; éste es, a menudo, poco apropiado para fines científicos, para los cuales debe cumplirse con la necesidad de una formulación más exacta. Al investigador de la naturaleza le debe estar permitido, en su uso de la palabra «oído», apartarse de los otros usos corrientes. En el dominio de la Lógica, las resonancias de pensamientos afines pueden ser molestas. De acuerdo con lo que se dijo del uso de «o», se puede afirmar, conforme a la verdad: «Federico el Grande venció en Rossbach o dos es mayor que tres». A eso dirá alguien: «¡Qué extraño! ¿Qué tiene que ver la victoria en Rossbach con el absurdo de que dos es mayor que tres?» Que dos es mayor que tres es falso, pero no absurdo. Si la falsedad de un pensamiento es fácil o difícil de ver no significa ninguna diferencia para la Lógica. Se está acostumbrado a admitir que, en proposiciones unidas por «o», el sentido de una tenga que ver con el sentido de la otra, que entre ellas exista algún parentesco; en algún caso dado hasta se lo podrá mencionar, pero en otro caso se tendrá otra clase de parentesco, de modo que sería imposible establecer un parentesco de sentido

* Pronunciadas sin poder afirmativo y no como preguntas. *(N. de los T.).*

que siempre estuviera relacionado con el «o» y que pudiera adjudicarse al sentido de esta palabra. Pero, ¿por qué agrega el hablante la segunda proposición? Si quiere afirmar que Federico el Grande venció en Rossbach, para ello bastaba con la primera proposición. Es de admitir que el hablante no quiso decir que dos es mayor que tres. Si el hablante se hubiese contentado con la primera proposición, hubiera dicho más con menos palabras. Para qué, pues, esas palabras de adorno. También estas preguntas conducen sólo a pensamientos secundarios. Qué propósitos o motivaciones tendría el hablante para decir justamente esto y no aquello, eso no nos concierne aquí, sino sólo aquello que él dice.

Los cuatro primeros tipos de articulaciones de pensamientos tienen en común el que los pensamientos articulados son intercambiables. También aquí damos aún una conclusión:

(A o B) es verdadero;
A es falso; por lo tanto
B es verdadero.

Quinto tipo de articulación de pensamientos

Si partiendo de la negación de un pensamiento más un segundo pensamiento, formamos una articulación del primer tipo, habremos obtenido así una articulación del quinto tipo del primer pensamiento con el segundo. Si «A» expresa al primer pensamiento y «B» al segundo, el sentido de

«(no A) y B»

constituye dicha articulación de pensamientos. Una articulación de este tipo es sólo entonces verdadera, cuando el primer pensamiento articulado es falso, el segundo verdadero. Así, por ejemplo, la articulación de pensamientos expresada por

«(no $3^2=2^3$) y ($2^4=4^2$)»

es verdadera. Es el pensamiento de que 3^2 no es igual a 2^3, y 2^4 es igual a 4^2. Cuando alguien ha reconocido que 2^4 es igual a 4^2, supone, tal vez que, en general, el exponente y la base de una potencia son intercambiables. Otro busca eliminar este error diciendo: «2^4 es igual a 4^2, pero 2^3 no es igual a 3^2». Pues bien, si se pregunta que diferencia existe entre unir mediante «y» o mediante «pero», habrá que contestar: para lo que he llamado pensamiento o sentido de la proposición, es exactamente lo

mismo si se elige «y» o «pero». La diferencia consiste sólo en lo que yo llamo luminosidad[7] del pensamiento; no pertenece al dominio de la lógica.

El articulante en una articulación de pensamientos del quinto tipo es el sentido doblemente falto de complementación de la expresión doblemente falta de complementación

«(no) y ( )».

Aquí los pensamientos articulados no son intercambiables, pues

«(no *B*) y *A*»,

no expresa lo mismo que

«(no *A*) y *B*».

La posición del primer pensamiento en la articulación no es del mismo tipo que la del segundo. Como no me atrevo a formar una nueva palabra, necesito usar la palabra «posición» en significado translaticio. Hablando de expresiones escritas de pensamientos se tomará la palabra «posición» en su habitual significación de lugar. A la posición en la expresión del pensamiento le tiene que corresponder algo en el pensamiento mismo, y para ello reservo aquí la palabra «posición». Aquí no se puede simplemente hacer cambiar de posición a los pensamientos, pero sí podemos colocar la negación del segundo pensamiento en la posición del primero, y, simultáneamente, la negación del primero en la posición del segundo. También esto, es claro, debe ser entendido con un poco de sutileza, pues no estamos hablando de un obrar en el espacio y en el tiempo. De modo que de

«(no *A*) y *B*»

obtenemos

«(no (no *B*)) y (no *A*)».

Pero, puesto que «no (no *B*)» tiene el mismo sentido que «*B*», tenemos

«*B* y (no *A*)»,

que expresa lo mismo que

«(no *A*) y *B*».

---

[7] Comp. mi artículo *El pensamiento,* en el primer tomo de esta publicación, página 63.

Sexto tipo de articulación de pensamientos

La negación de una articulación del quinto tipo de un pensamiento con un segundo pensamiento es una articulación del sexto tipo del primer pensamiento con el segundo. También se puede decir: la articulación de segundo tipo de la negación del primer pensamiento con el segundo es una articulación del sexto tipo del primer pensamiento con el segundo. Una articulación del quinto tipo de un primer pensamiento con un segundo es entonces, y sólo entonces, verdadera, cuando el primer pensamiento es falso, el segundo, en cambio, verdadero. De ahí se sigue que una articulación del sexto tipo de un primer pensamiento con un segundo es entonces, y sólo entonces, falsa, cuando el primer pensamiento es falso, el segundo, en cambio, verdadero. Dicha articulación es, luego, verdadera, cuando el primer pensamiento es verdadero, siendo lo mismo que el segundo sea verdadero o falso. Dicha articulación es también verdadera cuando el segundo pensamiento es falso, siendo lo mismo que el primero sea verdadero o falso.

Sin saber si

$$\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^{2} \text{ es mayor que } 2^2$$

y sin saber si

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ es mayor que } 2,$$

puedo, no obstante, reconocer que la articulación de sexto tipo del primer pensamiento con el segundo es verdadera. La negación del primer pensamiento y el segundo pensamiento se excluyen uno al otro. Se lo puede manifestar de esta manera:

«Si

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \text{ es mayor que } 2, \text{ entonces}$$

$$\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^{2} \text{ es mayor que } 2^2.\text{«}$$

En lugar de «articulación de pensamiento del sexto tipo» digo también «articulación hipotética de pensamientos», y llamo al primer pensamiento «condición», al segundo «conclusión» en la la articulación hipotética de pensamientos. Según ello, una articulación hipotética de pensamientos es verdadera, cuando la conclusión es verdadera. También es verdadera una articulación hipotética de pensamientos, cuando la condición es falsa, sien-

do lo mismo que la conclusión sea verdadera o falsa. Pero la conclusión siempre debe ser un pensamiento.

Sean, nuevamente, «*A*» y «*B*» proposiciones en sentido estricto, entonces tendremos en

«no ((no *A*) y *B*)»,

la expresión de una articulación hipotética cuya conclusión es el sentido (contenido del pensamiento) de «*A*», y cuya condición es el sentido de «*B*». Para ello podemos escribir

«si *B*, entonces *A*».

Naturalmente aquí pueden surgir objeciones. Se dirá que de este modo no se está dentro del uso lingüístico. Frente a eso hay que recalcar que a la ciencia le debe ser permitido tener su propio uso del lenguaje, que ella no puede someterse siempre al lenguaje de la vida. Justamente en ello veo la mayor dificultad de la Filosofía, en que para su trabajo encuentra un instrumento poco apropiado: el lenguaje de la vida, en cuya formación han intervenido necesidades totalmente diferentes a las de la Filosofía. Por ello también la Lógica le es necesario forjarse, a partir de lo dado, un instrumento útil ajustado a su trabajo. Y aun para esta tarea encuentra ante sí muy pocas herramientas utilizables.

La proposición

«Si 2 es mayor que 3, entonces 4 es un número primo»,

seguramente será considerada absurda por muchos, y, sin embargo, según lo que he establecido, es verdadera, ya que la condición es falsa. Que sea falsa no significa todavía que sea absurda. Sin saber si

$$\sqrt[10]{10^{21}} \text{ es mayor que } \left(\frac{21}{20}\right)^{100}$$

se puede reconocer que, si

$$\sqrt[10]{10^{21}} \text{ es mayor que } \left(\frac{21}{20}\right)^{100},$$

$$\left(\sqrt[10]{10^{21}}\right)^2 \text{ es mayor que } \left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2;$$

y nadie verá en eso un absurdo. Pues bien, es falso que

$$\sqrt[10]{10^{21}} \text{ sea mayor que } \left(\frac{21}{20}\right)^{100}.$$

Y es igualmente falso que

$$(\sqrt[10]{10^{21}})^2 \text{ sea mayor que } \left(\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\right)^2.$$

Si esto fuera tan fácil de ver como la falsedad de que 2 es mayor que 3, la articulación hipotética de pensamientos parecería tan absurda en este ejemplo como en aquél. A la consideración lógica no le afecta en nada que la falsedad de un pensamiento sea fácil o difícil de ver, pues la diferencia es psicológica.

También el pensamiento expresado en la proposición

> «Si tengo un gallo que hoy haya puesto huevos, mañana temprano se derrumbará la catedral de Colonia»,

es verdadero. «Pero es que aquí la condición y la conclusión no tienen ninguna relación interna», dirá quizá alguien. Pues bien, en mi explicación no he puesto tal relación como exigencia; sólo pido que, por «si *B*, entonces *A*» se entienda lo que he dicho y expresado en la forma

«no [no *A* y *B*]».

Por cierto que esta concepción de la articulación hipotética de pensamientos tiene que extrañar al principio. En mi explicación no se trata de ajustarse al lenguaje de la vida; para la Lógica éste es a menudo borroso y vacilante. En él se ordenan otras clases de hechos, como ser la relación de causa y efecto, el propósito con el que un hablante pronuncia una proposición del tipo «si *B*, entonces *A*», la causa por la cual él considera verdadero su contenido. El hablante da, tal vez, señales respecto de aquellas preguntas que pueden surgir en el oyente. Tales señales pertenecen a lo accesorio que, en el lenguaje de la vida, frecuentemente rodea al pensamiento. Mi tarea aquí es, apartando lo accesorio, aislar, como núcleo lógico, una articulación a la que he llamado articulación hipotética de pensamientos. El examen de la construcción de los pensamientos articulados en dos pensamientos debe dar el fundamento para considerar muchos tipos de pensamientos articulados. Lo dicho acerca de la expresión «si *A*, entonces *B*» no debe ser entendido de manera que toda articulación de proposiciones con esta forma exprese una articulación hipotética de pensamientos. Si «*A*» no es por sí misma la expresión completa de un pensamiento, es decir, una proposición propiamente dicha; o si «*B*» no es por sí misma una proposición propiamente dicha, entonces estamos frente a otro caso. En la articulación de proposiciones:

> «Si alguien es un asesino, él es también un delincuente»,

ni la proposición de condición ni la de conclusión expresan en sí mismas un pensamiento. Si lo expresado en la proposición «él es un delincuente» —aislada de su relación con la otra proposición y pronunciada sin señales adicionales— es verdadero o falso, eso es imposible de determinar, ya que la palabra «él» no es nombre propio y en la proposición aislada y pronunciada sin señales adicionales no hace referencia a nada. Por lo tanto, dicha proposición no expresa ningún pensamiento, no es una proposición propiamente dicha. Lo mismo vale para la condición, pues ella contiene un componente —«alguien»— que tampoco hace referencia a nada. Sin embargo, la articulación de proposiciones puede expresar un pensamiento. El «alguien» y el «él» apuntan el uno al otro. Por ello, y por el «si —, entonces —», las dos proposiciones están tan unidas, que juntas expresan un pensamiento, mientras que, en una articulación hipotética de pensamientos, podemos distinguir tres pensamientos: la condición, la conclusión y el pensamiento articulado por ellas dos. Así, una articulación de proposiciones no siempre expresa una articulación de pensamientos, y es muy importante diferenciar los dos casos que se dan en una articulación de proposiciones de forma:

«Si *B*, entonces *A*.»

Propongo, nuevamente, una conclusión:

si [*B*, entonces *A*] es verdadero;
B es verdadero; por lo tanto
A es verdadero.

En esta conclusión surge, tal vez, con la mayor claridad lo propio de la articulación hipotética de pensamientos.

También la siguiente modalidad de conclusión merece una consideración:

si [*C*, entonces *B*] es verdadero;
si [*B*, entonces *A*] es verdadero; por lo tanto
si [*C*, entonces A] es verdadero.

Aquí hay que llamar la atención sobre una afirmación que puede confundir. Muchos matemáticos se expresan como si se pudieran extraer conclusiones de un pensamiento cuya verdad está aún en duda. Cuando se dice: «deduzco *A* de *B*», o «saco como conclusión de *B* la verdad de *A*», se está entendiendo por *B* una de las premisas o la premisa de la conclusión. Pero antes de que se haya reconocido la verdad de un pensamiento, no se le puede usar como premisa de una conclusión, no se puede deducir

o concluir nada de él. Si, no obstante, se cree estar haciéndolo, se está confundiendo, al parecer, el reconocimiento de la verdad de una articulación hipotética de pensamientos con una conclusión en la que se toma la condición de dicha articulación por una premisa. El reconocimiento de la verdad del sentido de

«si *C*, entonces *A*»,

puede, sí, basarse en una conclusión, como en el ejemplo dado arriba, y allí puede ser dudoso que *C* sea verdadero [8]; pero en este caso, el pensamiento expresado en «*C*» no es premisa de esa conclusión, premisa lo era el sentido de la proposición

«si *C*, entonces *B*».

Si el contenido del pensamiento de «*C*» fuera premisa de la conclusión, no aparecería en el resultado de la conclusión; pues en ello consiste justamente el efecto del concluir.

He mos visto que en una articulación de pensamientos del quinto tipo se puede reemplazar al primer pensamiento por la negación del segundo, y, al mismo tiempo, al segundo pensamiento por la negación del primero, sin modificar el sentido de la totalidad. Y como una articulación de pensamientos del sexto tipo es la negación de una articulación de pensamientos del quinto tipo, vale también lo mismo para ella: en una articulación hipotética se puede, sin modificar el sentido, reemplazar la condición por la negación de la conclusión y, al mismo tiempo, la conclusión por la negación de la condición. —Paso del *modus ponens* al *modus tollens*—, contraposición.

Revisión de las seis articulaciones de pensamientos

I *A* y *B*;	II no (*A* y *B*);
III (no *A*) y (no *B*);	IV no ((no *A*) y (no *B*));
V (no *A*) y *B*;	VI no ((no *A*) y *B*):

Cabe agregar a éstas

A y (no *B*);

pero el sentido de

«*A* y (no *B*)»

es el mismo que el de

«(no *B*) y *A*»,

[8] Más exactamente, si el pensamiento expresado por «*C*» es verdadero.

que también pueden ser las proposiciones propiamente dichas «*A*» y «*B*». Y puesto que

«(no *B*) y *A*»

tiene la misma forma que

«(no *A*) y *B*»,

no obtenemos así nada nuevo, sino sólo, nuevamente, la expresión de una articulación de pensamientos del quinto tipo, y en

«no (*A* y (no *B*))»

tenemos nuevamente la expresión de una articulación de pensamientos del sexto tipo. Nuestros seis tipos de articulaciones forman así un todo cerrado, y como componentes originarios aparecen las articulaciones del primer tipo y la negación. La preeminencia que, según esto parece tener sobre los otros tipos la articulación del primer tipo, por admisible que pueda parecerle al psicólogo no está justificada para la lógica. Se puede, en efecto, basándose en cualquiera de las seis articulaciones, deducir a partir de ella a las otras con la ayuda de la negación, de modo que para la lógica los seis tipos de articulación están igualados. Si, por ejemplo, se parte de la articulación hipotética

si *B*, entonces *C*

o de

no ((no *C*) y *B*)

y se establece para «*C*» «no *A*», se obtiene

si *B*, entonces no *A*

o bien

no (*A* y *B*).

Mediante la negación del todo se obtiene

no (si *B*, entonces no *A*)

o bien

A y *B*.

Según lo cual

no (si *B*, entonces no *A*)

quiere decir lo mismo que

A y *B*,

y es una articulación del primer tipo reducida a una articulación hipotética y a la negación. Y puesto que las restantes articulaciones de pensamientos pueden ser deducidas de las articulaciones del primer tipo y de la negación, así pues, todas las articulaciones de pensamientos de nuestros seis tipos son deducibles también de las articulaciones hipotéticas y de la negación. Lo dicho sobre las articulaciones del primero y sexto tipos vale para las articulaciones de pensamientos de nuestros seis tipos, de modo que ninguno de dichos tipos tiene preeminencia respecto de los otros. Cada uno de ellos puede servir de base para la deducción de los otros. La elección no está determinada por la lógica.

Algo similar tenemos en la fundamentación de la geometría. Se pueden establecer dos geometrías de tal modo, que algunos teoremas de la primera aparecen como axiomas de la segunda, y algunos teoremas de la segunda aparecen como axiomas de la primera.

Consideremos ahora casos en que se articulan ya no pensamientos diferentes, sino un pensamiento consigo mismo. Si «*A*» es, nuevamente, una proposición propiamente dicha, entonces

«*A* y *A*»

expresa el mismo pensamiento que «A». Aquel no dice nada más ni nada menos que éste. De acuerdo con esto

«no (*A* y *A*)»

expresa lo mismo que «no *A*».

Del mismo modo,

«(no *A*) y (no *A*)»

expresa lo mismo que «no *A*»: en consecuencia,

«no [(no *A*) y (no *A*)]»

expresa lo mismo que «no no *A*» o que «*A*».

Ahora bien,

«no [(no *A*) y (no *A*)]»

expresa una articulación del cuarto tipo. Para lo cual decimos también

«*A* o *A*».

Por tanto, no sólo

«*A* y *A*»,

sino también

«*A* o *A*»

De otro modo ocurre con la articulación del quinto tipo. La articulación de pensamientos expresada por

«[(no *A*) y *A*]»

es falsa porque de dos pensamientos, de los cuales uno es la negación del otro, uno es siempre falso, de modo que también su articulación del primer tipo es falsa. Según esto, la articulación del sexto tipo de un pensamiento consigo mismo, o sea la expresada por

«no [(no *A*) y *A*]»,

es verdadera, si *A* es una proporsición propiamente dicha. Esta articulación de pensamientos la podemos expresar lingüísticamente mediante:

«si *A*, entonces *A*»,

por ejemplo, "si la Schneekoppe es más alta que el Brocken, entonces la Scheekoppe es más alta que el Brocken".

En estos casos se imponen preguntas tales como: "¿expresa esta proposición un pensamiento? ¿No está vacía de contenido? ¿Qué se obtiene de nuevo cuando se la oye?". Pues bien, quizá antes de oirla, esta verdad no había sido conocida y, por tanto, tampoco reconocida. En tal medida es, por cierto, posible obtener de ella, llegado el caso, algo que nos es nuevo. No se puede rechazar la verdad de que la Schneekoppe es más alta que el Brocken, si la Schneekoppe es más alta que el Brocken. Puesto que sólo los pensamientos pueden ser verdaderos, esta articulación tiene que expresar un pensamiento, y entonces también la negación de ese pensamiento es un pensamiento, a pesar de su aparente absurdo. Hay que tener siempre presente que se puede expresar un pensamiento sin afirmarlo. Aquí se trata sólo del pensamiento. La apariencia de absurdo se da sólo en virtud del poder afirmativo, con el que, maquinalmente, se piensa que ha sido pronunciada la proposición. ¿Pero quién nos dice que alguien que la pronuncia sin poder afirmativo lo hace para proponer su contenido como verdadero? Quizá lo hace justamente con la intención opuesta.

Esto se puede generalizar. Sea «0» una proposición en la que se expresa un determinado caso de una ley lógica, pero que no se propone como verdadera. «No 0» aparece entonces fácilmente como absurda, pero sólo porque se la piensa pronunciada con poder afirmativo. El afirmar un pensamiento que contradice una ley lógica puede parecer, en efecto, si no absurdo, al menos un contrasentido, ya que la verdad de una ley lógica surge con inmediata evidencia de él mismo, del sentido de su expresión. Pero un pensamiento que contradice una ley lógica puede ser pronunciado porque puede ser negado. «0» misma, sin embargo, parece casi no tener contenido.

Puesto que toda articulación de pensamientos es ella misma un pensamiento, puede ser articulada con otros pensamientos. Así, la articulación expresada en

«(*A* y *B*) y *C*»

se articula con los pensamientos expresados en

«*A* y *B*» y en «*C*».

Pero se la puede concebir también como articulada con los pensamientos expresados por

«*A*», «*B*», «*C*».

Así pueden surgir[9] articulaciones de pensamientos que contienen tres pensamientos. Otros ejemplos de articulaciones de tres pensamientos son las expresadas en

«no [(no *A*) y (*B* y *C*)]» y
«no [(no *A*) y ((no *B*) y (no *C*))]».

Y se encontrarán también ejemplos de articulaciones que contienen cuatro, cinco o más pensamientos.

Para la formación de todas estas articulaciones alcanzan articulaciones de pensamientos del primer tipo y la negación, pudiéndose emplear en lugar de la primera, cualquiera de las otras de nuestros seis tipos. Aquí surge la pregunta de si toda articulación de pensamientos está formada así. En lo que respecta a la matemática, estoy convencido de que en ella no se dan articulaciones que tengan otra formación. También en la física, química y astronomía podría difícilmente ser de otro modo; pero las proposiciones finales nos imponen cierto cuidado y parecen exigir una investigación más exacta. Este problema lo dejaré aquí sin resolver. Con

[9] Este surgir no debe ser entendido como proceso temporal.

todo, las articulaciones de pensamientos así constituidas, a partir de articulaciones del primer tipo y la negación, parecen merecer una denominación especial. Se podrían llamar articulaciones matemáticas de pensamientos. Con ello no está dicho que haya otras articulaciones de pensamientos. También en otro aspecto las articulaciones matemáticas de pensamiento parecen pertenecer a la misma clase. Si en una de ellas se reemplaza un pensamiento verdadero por un pensamiento verdadero, la articulación de pensamientos es verdadera o falsa según sea verdadera o falsa la articulación original. Lo mismo ocurre si en una articulación matemática de pensamientos se reemplaza un pensamiento falso por un pensamiento falso. Quiero decir, entonces, que dos pensamientos tienen el mismo valor de verdad si ambos son verdaderos o si ambos son falsos. Según esto digo que el pensamiento expresado en «*A*» tiene el mismo valor de verdad que el expresado en «*B*», *si*

«*A* y *B*»,

o bien

«(no *A*) y (no *B*)»,

expresan un pensamiento verdadero. Una vez establecido esto, nuestra proposición puede ser pronunciada así:

«Si en una articulación matemática de pensamientos se reemplaza un pensamiento por un pensamiento del mismo valor de verdad, la articulación de pensamientos así obtenida tiene el mismo valor de verdad que la originaria.»

CUARTA INVESTIGACION LOGICA. GENERALIDAD LOGICA *

En esta revista publiqué un artículo en el cual la articulación de pensamientos también encontraba su lugar. Próximo a éste queda buscar un pasaje a lo que se llama *ley* en la física, en la matemática y en la lógica. A menudo expresamos una ley en la forma de una articulación hipotética de proposiciones que se compone de una o más proposiciones-condiciones (premisas) y de una conclusión. No obstante hay todavía un obstáculo en el camino. La articulación hipotética de pensamientos tratada por mí, no pertenece a las leyes, porque a ellas falta la generalidad con la que se diferencian las leyes de los hechos particulares, que, por ejemplo, en la historia estamos acostumbrados a encontrar. Realmente la diferencia entre leyes y hechos particulares es profundamente decisiva. En ella descansa la diferencia fundamental de la actividad científica en física y en historia. La primera se esfuerza en encontrar leyes; la historia quiere averiguar hechos particulares. Claro está que también la historia quiere conceptualizar causalmente y para esto debe, por lo menos, suponer la presencia de una legalidad.

Por el momento baste esto para dejar aparecer como necesaria la observación exacta de la generalidad.

El valor de una ley para nuestro conocimiento descansa en que en ella, infinidad, por cierto, de hechos particulares están contenidos como casos especiales. Sacamos provecho del conocimiento de una ley buscando una cantidad de conocimientos particulares a través de deducciones de lo general a lo particular, donde por cierto aún un trabajo intelectual —el deducir— es siempre necesario. Quien sepa cómo sucede un tal deducir ha comprendido también lo que es generalidad en el significado de la palabra aquí mentado. A través de deducciones de otra clase podemos derivar de leyes conocidas nuevas leyes.

¿Qué es, pues, la esencia de la generalidad? Ya que aquí se trata de leyes y las leyes son pensamientos solamente puede tratarse de la generalidad de pensamientos. Cada ciencia se hace efectiva en un conjunto de pensamientos reconocidos como verdaderos; pero, no obstante, los pensamientos son raramente objetos de observación de los cuales algo sea enunciado; como tales aparecen en la mayoría de los casos los objetos

---

* Publicado por Hermes-Kambartel-Kaulbach, en GOTTLOB FREGE: *Nachgelassene Schriften* (Escritos póstumos), Tomo I, Félix Meiner Verlag, Hamburgo, 1969.

de la percepción sensible. Enunciando algo de éstos nos referimos a los pensamientos. Así se encuentran a menudo pensamientos también en la ciencia. Enunciando aquí la generalidad de los pensamientos los hacemos objetos de observación y se sitúan así en un lugar donde de lo contrario se encuentran objetos de la percepción sensible. Estos, que de otro modo, sobre todo en las ciencias naturales, son los objetos de la investigación se diferencian fundamentalmente de los pensamientos. Los pensamientos no son percibibles sensiblemente. Por cierto pueden ser los signos que expresan los pensamientos audibles o visibles, pero no los pensamientos mismos. Impresiones sensibles pueden llevarnos al reconocimiento de la verdad de un pensamiento, pero también podemos concebir pensamientos sin reconocerlos en cuanto verdaderos. Los pensamientos falsos son también pensamientos.

Si un pensamiento no es sensiblemente perceptible no hay que esperar que lo sea su generalidad. No estoy en la situación de poder mostrar un pensamiento como un mineralogista muestra un mineral haciendo atender su brillo propio. Determinar la generalidad a través de una definición sería imposible.

El lenguaje parece poder ofrecernos una solución, pues por una parte son sus frases sensiblemente perceptibles y por otra parte, expresan pensamientos. Como medio de expresión del pensamiento se debe adecuar el lenguaje a lo pensado. Así esperamos poderlo usar como puente entre lo sensible y lo no sensible. Después que nos hemos entendido sobre lo lingüístico puede ser más fácil extender nuestro entendimiento a lo pensado que se configura en el lenguaje. No se trata aquí del entender habitual del lenguaje, no del comprender los pensamientos expresados en él, sino del concebir la cualidad del pensamiento que llamo generalidad lógica. Por cierto que en ello se debe contar con una amabilidad del otro y esta espera puede ser defraudada. El uso del lenguaje exige también cuidado. No tenemos que pasar por alto el profundo abismo que sin duda separa la región de lo hablado y la región de lo pensado, y cómo, a través del lenguaje, son colocados ciertos límites al corresponder recíproco de ambas regiones.

¿En qué forma aparece pues la generalidad en el lenguaje? Para el mismo pensamiento general tenemos distintas expresiones:

«Todos los hombres son mortales»,
«Cada hombre es mortal»,
«Cuando algo es un hombre, ello es mortal».

La diferencia en las expresiones no concierne al pensamiento mismo. Para nosotros es conveniente usar sólo un único modo de expresión para que diferencias secundarias, por ejemplo, en la coloración del pensamien-

to no aparezcan como diferencias de pensamiento. Las expresiones con «todo» y «cada» no son apropiadas para ser usadas en todos los casos donde aparece generalidad porque no se deja cada ley extender en esta forma. Por otra parte en el último modo de expresión tenemos también la forma difícilmente prescindible de la articulación hipotética de proposiciones y las partes de proposición de significado indeterminado «algo», «ello» y en éstas se halla propiamente la expresión de la generalidad. De este modo de expresión podemos fácilmente pasar a lo particular sustituyendo la parte de la proposición de significación indeterminada con partes que designan determinadamente:

«Si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal».

A causa de esta posibilidad de pasar de lo general a lo particular para nosotros son solamente utilizables las expresiones de generalidad con partes de significación indeterminada; sin embargo, si tuviéramos que limitarnos a «algo» y «ello» podríamos solamente tratar casos muy simples. Estamos cerca de proceder con el método de la Aritmética eligiendo letras como las partes de significación indeterminada de la proposición:

«Si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal».

Las mismas figuras de letras se remiten la una a la otra. En lugar de «*a*» podríamos igualmente bien tomar «*b*» o «*c*». Pero exactamente observado, con esto sobrepasamos los límites de lo hablado, de un lenguaje determinado para el oído, y nos dirigimos a una región determinada para los ojos, al lenguaje escrito o impreso. Una frase que alguien escribe es antes que nada una regla para la construcción de una frase hablada en un lenguaje cuyos sonidos sirven como signos para la expresión de un sentido. Así se origina en primer término sólo una conexión mediata entre signos escritos y un sentido expresado. Pero una vez que esta conexión ha sido lograda se puede ver también la frase escrita o impresa también inmediatamente como expresión de un pensamiento, por lo tanto, como una proposición en el sentido propio de la palabra. Así se obtiene una lengua destinada a los órganos de la vista que en casos especiales también puede aprender un sordo. En ésta pueden ser admitidas letras únicas como partes de proposición de significación indeterminada. El lenguaje expuesto de este modo, al que quiero llamar *lenguaje auxiliar,* debe ayudarnos como puente entre lo sensible y lo no sensible. Contiene dos distintas *partes componentes: el formador de palabras y las letras* particulares. Estas deben significar indeterminadamente a cada palabra correspondiente del lenguaje hablado. Hay que diferenciar de este lenguaje auxiliar el lenguaje en

el cual se efectúa mi razonamiento. Este es el castellano usual escrito o impreso, mi lenguaje de exposición. Por el contrario las proposiciones del lenguaje auxiliar son los objetos de los que se trata en mi lenguaje de exposición. Por eso en mi lenguaje de exposición los debo poder designar del mismo modo que en un tratado astronómico se designan los planetas con sus nombres propios «Venus», «Marte». *En cuanto* tales *nombres propios de las proposiciones del lenguaje auxiliar, las utilizo a ellas mismas pero encerradas entre comillas.* De esto se deduce que las proposiciones del lenguaje auxiliar nunca pueden ser enunciadas como afirmaciones. «Si *a* es un hombre, *a* es mortal» es una proposición del lenguaje auxiliar en la cual es expresado un pensamiento general. Vamos de lo general a lo particular sustituyendo letras iguales de significación indeterminada con nombres propios iguales (iguales, esto es, del mismo trazado). En lo esencial se trata en nuestro lenguaje auxiliar que los nombres propios iguales designen el mismo objeto (hombres). Signos vacíos (nombres) no se consideran aquí nombres propios [1]. Sustituyendo las letras trazadas de significación indeterminada con nombres propios formados como «Napoleón» obtenemos así:

«Si Napoleón es un hombre, Napoleón es mortal.

Pero esta proposición no debe verse como conclusión, pues a la proposición «Si *a* es un hombre, *a* es mortal» no le estaba unido un poder de afirmar —el pensamiento en ella expresado no aparece por lo tanto aquí reconocido como verdadero—, y *solo un pensamiento reconocido como verdadero puede servir de premisa a una conclusión.* De ella puede hacerse una conclusión si se libera de sus comillas a ambas proposiciones de nuestro lenguaje auxiliar con lo que es posible colocarla con poder afirmativo.

La articulación de proposiciones «*Si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal*» expresa una articulación hipotética de pensamientos que consiste en una condición y una consecuencia. Aquella es expresada en la proposición «*Napoleón es un hombre*», ésta en la proposición «*Napoleón es mortal*». Sin embargo, exactamente observadas en nuestra articulación de proposiciones no están contenidas proposiciones conformadas como «*Napoleón es un hombre*» o «*Napoleón es mortal*». En esta desviación de lo hablado de lo pensado se descubre una carencia aún a reparar de nuestro lenguaje auxiliar. Al pensamiento que expresé en la articula-

[1] *Del mismo trazado* denomino a los nombres propios de nuestro lenguaje auxiliar que según la intención del autor deben ser del mismo trazado y de igual extensión (gross) si esta intención es reconocible aún cuando ella no sea estrictamente alcanzada.

ción de proposiciones «*Si Napoleón es un hombre, Napoleón es mortal*» a partir de ahora quiero llamarlo la segunda proposición. Del mismo modo se debe operar en casos parecidos. Así a la proposición «Si *a* es un hombre, *a* es mortal» quiero también convertirla en «Si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal» que a partir de ahora llamaré la primera proposición[2], En la primera proposición diferencio a ambas letras particulares «*a*», de las partes restantes de la proposición.

[2] La primera proposición no expresa como la segunda una articulación de pensamientos porque «*a es un hombre*» del mismo modo que «*a* es mortal» no expresa un pensamiento. Aquí tenemos propiamente sólo partes de una proposición pero ninguna proposición.

GOTTLOB Frege, el famoso matemático y filósofo, nació en Wismar en 1848 y murió en Bad Kleinen en 1925. Fue «privatdozent» de matemáticas en la Universidad de Jena desde 1874 hasta 1896, y desde esta fecha continuó enseñando en la misma Facultad como profesor honorario hasta 1917.

Sus investigaciones se extienden por el compo de la matemática y la filosofía, especialmente en lo que atañe a la Lógica. La búsqueda de los fundamentos filosóficos de la matemática llevó a Frege al descubrimiento de aspectos fundamentales para la investigación filosófica, como los que se refieren a la estructura del lenguaje en su relación con su contenido significativo, las posibles connotaciones esenciales de las estructuras simbólicas, el intento de reducir el mecanismo matemático a ciertos principios lógicos universales, y otros muchos que están en el fundamento de la filosofía moderna.

Ni los «Principia» de Russell y Whitehead, ni el «Tractatus» de Wittgenstein, ni muchas de las proposiciones básicas de los diferentes analistas modernos, pueden entenderse del todo si no se descubre su diálogo, implícito o explícito, con lo que dijo Frege.

Los ensayos que a continuación se ofrecen, traducidos con un gran respeto, tanto por el sentido como por la ambigua literalidad que en ocasiones utiliza Frege, son esenciales para que el lector que tenga interés por la Filosofía en general y los fundamentos de la Lógica en particular, conozca la fuente de donde procede una parte considerable del pensamiento filosófico moderno.